

UNIVERSITE DE LIMOGES

U.E.R. des SCIENCES

D.E.A.

DE

COMMUNICATIONS MICROONDES ET OPTIQUES

RAPPORT DE STAGE

Présenté par

IOANNIS ANDRITSOS

Sujet : « Propagation du mode TE_{11} dans un guide circulaire courbé »

Membres du jury :

Messieurs : ARNAUD
GARAULT
PAPIERNIK
JOINDOT
FRAY
VILOTTE

Le 30 Novembre 1978

TABLE DES MATIÈRES

Introduction	
CHAPITRE 1 <u>Propagation du mode TE_n dans un guide circulaire sans défaut.</u>	
1.1 Développement du champ électromagnétique dans un volume cylindrique	2
1.2 Calcul des coefficients des fonctions propres et des vecteurs propres .	3
1.3 Les champs du mode TE_{mp}	4
1.4 Calcul du flux de puissance	5
1.5 Pertes dans un guide circulaire	6
1.6 Coefficient d'atténuation	6
CHAPITRE 2 <u>Propagation dans un guide courbé</u>	
2.1 Système de coordonnées Serret - Frenet	8
2.2 Equations fondamentales du guide courbé	9
2.3 Couplage des modes	11
CHAPITRE 3 <u>Résolution des systèmes d'équations</u>	
3.1 Polarisation perpendiculaire au plan de symétrie	17
3.1.1 Méthode de perturbation - méthode de Poincaré	18
3.1.2 Approximation d'ordre (0)	19
3.1.3 Approximation d'ordre (1)	20
3.1.4 Conditions aux limites	23
3.1.5 Approximation d'ordre (2)	24
3.2 Polarisation parallèle au plan de symétrie	27

3.2.1	Approximation d'ordre (2)	29
	Conclusion	32
Annexe A	Definition et propriétés des fonctions propres et des vecteurs propres - Application au guide circulaire.	33
Annexe B	Relations entre coordonnées toroïdales et coordonnées cylindrique - Etablissement des équations du guide courbé	37
Annexe C	Intégrales des fonctions de Bessel	45

INTRODUCTION

Le guide circulaire fonctionnant sur le mode TE_{11} tend à être utilisé comme feeder d'antenne. Actuellement un tel guide est commercialisé par la société "Andrews". Ce mode présente l'avantage d'être le mode fondamental du guide circulaire et d'avoir une atténuation assez faible vers les basses fréquences, par rapport à celle du mode TE_{01} . En plus, dans le cas de feeder d'antenne on peut en principe transmettre deux polarisations dans le guide. Les propriétés électromagnétiques du guide circulaire rectiligne fonctionnant sur le mode TE_{11} sont parfaitement connues, tandis que l'étude de son comportement en courbure n'a pas été abordée à notre connaissance.

Cette étude concerne la propagation du mode fondamental TE_{11} dans un guide circulaire courbé. Pour faciliter l'étude, on introduit un système de coordonnées toroidal. En écrivant les équations de Maxwell dans ce système et en développant les champs magnétique et électrique en vecteurs propres et en fonctions propres, on trouve dans des conditions bien précises l'existence d'un certain nombre de couplages entre modes. On a résolu finalement un système de quatre équations différentielles couplées avec certaines conditions aux limites, en utilisant la méthode de perturbation et la méthode de Poincaré.

CHAPITRE 1

Propagation du mode TE_{11} dans un guide circulaire sans défaut

1.1 Développement du champ électromagnétique dans un volume cylindrique.

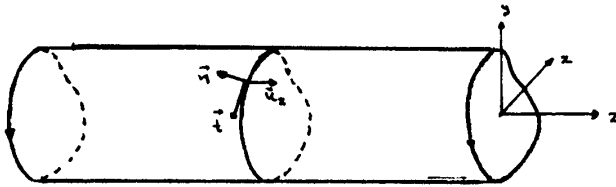


Fig 1.

Le champ électrique et le champ magnétique peuvent être décomposés en composantes longitudinales dirigées suivant l'axe Oz et, en composantes transversales contenues dans le plan perpendiculaire à Oz telles que

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{E}_t + E_z \vec{u}_z \\ \vec{H} &= \vec{H}_t + H_z \vec{u}_z\end{aligned}\quad (1.1.1)$$

Les composantes longitudinales E_z et H_z peuvent être développées à l'aide des fonctions propres $\varphi_{mp}(p, \theta)$ et $\psi_{mp}(p, \theta)$. De même, les composantes transversales \vec{E}_t et \vec{H}_t peuvent être développées à l'aide des vecteurs propres de type électrique $\vec{g}_t \text{grad}_t \varphi_{mp}$ et $\vec{u}_z \wedge \vec{g}_t \text{grad}_t \psi_{mp}$ ou de vecteurs propres de type magnétique $\vec{u}_z \wedge \vec{g}_t \text{grad}_t \varphi_{mp}$ et $\vec{g}_t \text{grad}_t \psi_{mp}$. La définition et les propriétés des fonctions propres et des vecteurs propres apparaissent dans l'annexe A.

Les fonctions propres φ_{mp} et les vecteurs de type électrique dont les conditions aux limites sur le contour correspondent à celles vérifiées par le champ électrique, sont utilisées dans le développement

du champ électrique. Les fonctions propres ψ_{mp} et les vecteurs propres de type magnétique sont utilisés pour développer le champ magnétique.

Le développement du champ électromagnétique a donc pour expression:

$$\vec{E} = \sum_m \sum_p a_{mp}(z,t) \text{grad}_t \varphi_{mp} + \sum_m \sum_p b_{mp}(z,t) (\vec{u}_z \wedge \text{grad}_t \psi_{mp}) + \sum_m \sum_p c_{mp}(z,t) \varphi_{mp} \vec{u}_z$$

$$\vec{H} = \sum_m \sum_p \alpha_{mp}(z,t) (\vec{u}_z \wedge \text{grad}_t \varphi_{mp}) + \sum_m \sum_p \beta_{mp}(z,t) \text{grad}_t \psi_{mp} + \sum_m \sum_p \gamma_{mp}(z,t) \psi_{mp} \vec{u}_z$$

Les coefficients de développements sont donnés par les intégrales:

$$a_{mp} = \frac{1}{k_{mp}^2} \int_s \vec{E}_t \cdot \text{grad}_t \varphi_{mp} ds = \frac{1}{k_{mp}^2} \int_s \vec{E} \cdot \text{grad}_t \varphi_{mp} ds$$

$$b_{mp} = \frac{1}{\ell_{mp}^2} \int_s \vec{E}_t \cdot (\vec{u}_z \wedge \text{grad}_t \psi_{mp}) ds = \frac{1}{\ell_{mp}^2} \int_s \vec{E} \cdot (\vec{u}_z \wedge \text{grad}_t \psi_{mp}) ds$$

$$c_{mp} = \int_s E_z \varphi_{mp} ds = \int_s \vec{E} \cdot \vec{u}_z \varphi_{mp} ds \quad (12.2)$$

$$\alpha_{mp} = \frac{1}{k_{mp}^2} \int_s \vec{H}_t \cdot (\vec{u}_z \wedge \text{grad}_t \varphi_{mp}) ds = \frac{1}{k_{mp}^2} \int_s \vec{H} \cdot (\vec{u}_z \wedge \text{grad}_t \varphi_{mp}) ds$$

$$\beta_{mp} = \frac{1}{\ell_{mp}^2} \int_s \vec{H}_t \cdot \text{grad}_t \psi_{mp} ds = \frac{1}{\ell_{mp}^2} \int_s \vec{H} \cdot \text{grad}_t \psi_{mp} ds$$

$$\gamma_{mp} = \int_s H_z \psi_{mp} ds = \int_s \vec{H} \cdot \vec{u}_z \psi_{mp} ds$$

1.2 Calcul des coefficients des fonctions propres et vecteurs propres

En développant les équations de Maxwell suivant les fonctions propres et les vecteurs propres et en tenant compte des conditions aux limites sur le cylindre $r=a$, on obtient les relations suivantes entre les coefficients des développements :

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_{mp}}{\partial z} + j\omega\mu a_{mp} - c_{mp} &= 0 & \frac{\partial b_{mp}}{\partial z} - j\omega\epsilon b_{mp} - \gamma_{mp} &= 0 \\ \frac{\partial a_{mp}}{\partial z} + j\omega\epsilon a_{mp} &= 0 & \frac{\partial b_{mp}}{\partial z} - j\omega\mu b_{mp} &= 0 \\ a_{mp} + \frac{j\omega\epsilon}{k_{mp}^2} c_{mp} &= 0 & b_{mp} - \frac{j\omega\mu}{\ell_{mp}^2} \gamma_{mp} &= 0 \end{aligned} \quad (12.3)$$

On a tenu compte qu'il n'y a pas de charges et de courants dans le guide. Le premier ensemble d'équations précédent correspond aux modes TM_{mp} et le deuxième aux modes TE_{mp} .

Les équations différentielles vérifiées par les coefficients se déduisent de ces relations.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 a_{mp}}{\partial z^2} + (k^2 - k_{mp}^2) a_{mp} &= 0 & \frac{\partial^2 b_{mp}}{\partial z^2} + (k^2 - \ell_{mp}^2) b_{mp} &= 0 \\
 \frac{\partial^2 \alpha_{mp}}{\partial z^2} + (k^2 - k_{mp}^2) \alpha_{mp} &= 0 & \frac{\partial^2 \beta_{mp}}{\partial z^2} + (k^2 - \ell_{mp}^2) \beta_{mp} &= 0 & (1.2.2) \\
 \frac{\partial^2 c_{mp}}{\partial z^2} + (k^2 - k_{mp}^2) c_{mp} &= 0 & \frac{\partial^2 \gamma_{mp}}{\partial z^2} + (k^2 - \ell_{mp}^2) \gamma_{mp} &= 0
 \end{aligned}$$

1.3 Les champs du mode TE_{mp}

D'après le développement du champ électromagnétique en fonctions propres et en vecteurs propres, les champs électrique et magnétique transversaux et les champs magnétique et électrique longitudinaux pour les modes TE s'écrivent :

$$\begin{aligned}
 \vec{E}_t &= b_{mp} \vec{u}_z \wedge \text{grad}_t \Psi_{mp} \\
 \vec{H}_t &= \beta_{mp} \text{grad}_t \Psi_{mp} & (1.3.1) \\
 H_z &= \gamma_{mp} \Psi_{mp} \\
 E_z &= 0
 \end{aligned}$$

Compte tenu des relations précédentes et des équations on trouve :

$$\vec{E}_t = \frac{j\omega\mu}{\ell_{mp}^2} \vec{u}_z \wedge \text{grad}_t H_z \quad (1.3.2)$$

$$\vec{H}_t = -\frac{j\delta}{\ell_{mp}^2} \text{grad}_t H_z$$

où $\gamma^2 = k^2 - \ell_{mp}^2$ la constante de propagation du mode TE_{mp}

1.4 calcul du flux de puissance

Le flux de puissance moyenne est donné par le vecteur de Poynting:

$$\bar{P} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \iint_S (\vec{E} \wedge \vec{H}^*) \cdot \vec{u}_z ds \quad (1.4.1)$$

En remplaçant \vec{E} , \vec{H} par:

$$\vec{E} = \vec{E}_t + \vec{u}_z E_z$$

$$\vec{H} = \vec{H}_t + \vec{u}_z H_z$$

la relation précédente s'écrit :

$$\bar{P} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \iint_S (\vec{E}_t \wedge \vec{H}_t^*) \cdot \vec{u}_z ds$$

Compte tenu des expressions de \vec{E}_t , \vec{H}_t calculées dans le paragraphe précédent, on a :

$$\bar{P} = \frac{1}{2} \frac{\omega \mu}{\ell_{mp}^2} \iint_S (\operatorname{grad}_t H_z)^2 ds$$

En appliquant le théorème de la divergence et la condition aux limites ($\partial H_z / \partial n = 0$ sur c) on obtient :

$$\iint_S \operatorname{div} (H_z \operatorname{grad}_t H_z) ds = \int_c H_z \operatorname{grad}_t H_z \cdot \vec{n} dc = \int_c H_z \frac{\partial H_z}{\partial n} dc = 0$$

mais l'intégrale précédente peut s'écrire :

$$\iint_S \operatorname{div} (H_z \operatorname{grad}_t H_z) ds = \iint_S (\operatorname{grad}_t H_z \cdot \operatorname{grad}_t H_z) ds + \iint_S \operatorname{div} \operatorname{grad}_t H_z ds$$

H_z vérifie l'équation :

$$\operatorname{div} \operatorname{grad}_t H_z + \ell_{mp}^2 H_z = 0$$

Donc à partir de ces trois expressions le flux de puissance s'écrit :

$$\bar{P} = \frac{1}{2} \frac{kz\gamma}{\ell_{mp}^2} \iint_S H_z^2 ds \quad (1.4.2)$$

1.5 Pertes dans un guide circulaire

En chaque point de la surface du guide, on associe au champ magnétique la densité de courant superficiel :

$$\vec{J}_s = \vec{n} \wedge \vec{H}$$

où $\vec{H} = \vec{H}_t + \vec{u}_z H_z$ et $\vec{H}_t = -\frac{j\delta}{\rho_{mp}^2} \text{grad}_t H_z$

En remplaçant ces expressions dans la relation on a :

$$\vec{J}_s = -\frac{j\delta}{\rho_{mp}^2} \frac{dH_z}{dc} \vec{u}_z - \vec{t} H_z \quad (1.5.1)$$

Les pertes par effet Joule dans le guide sont données par la relation suivante :

$$P_j = \frac{R_s}{2} \int_c \vec{J}_s \cdot \vec{J}_s^* dc \quad (1.5.2)$$

où R_s est la résistivité superficielle du guide donnée par la relation

$$R_s = \frac{1}{\sigma \delta} = \sqrt{\frac{\pi \mu f}{\sigma}}$$

où f est la fréquence, et σ la conductivité

Donc les pertes par effet Joule sont données par la relation :

$$P_j = \frac{R_s}{2} \int_c \left(H_z^2 + \frac{\delta^2}{\rho_{mp}^2} \left| \frac{dH_z}{dc} \right|^2 \right) dc \quad (1.5.3)$$

avec $dc = a d\theta$, $\frac{dH_z}{dc} = \frac{1}{a} \frac{dH_z}{d\theta}$

1.6 Coefficient d'atténuation

Le coefficient d'atténuation est le rapport de la puissance perdue sur la puissance moyenne emmagasinée :

$$\alpha = \frac{1}{2} \frac{P_j}{P} \quad (1.6.1)$$

En remplaçant les relations 1.42, 1.53 dans l'expression précédente le coefficient d'atténuation s'écrit :

$$\alpha = \frac{1}{2Z} R_s \frac{\ell_{mp}^2}{8k} \frac{\int_c (H_z^2 + \frac{\delta^2}{\ell_{mp}^4} |\frac{dH_z}{dc}|^2) dc}{\iint_s H_z^2 ds} \quad (1.6.2)$$

En utilisant le développement du champ magnétique longitudinal H_z en fonctions propres (voir annexe A) on arrive à l'expression générale de l'atténuation :

$$\alpha = \frac{R_s}{2Z} \left(1 - \frac{U_{mp}^2}{k^2 a^2} \right)^{-1/2} \left(\frac{U_{mp}^2}{k^2 a^2} + \frac{m^2}{U_{mp}^2 - m^2} \right) \quad (1.6.3)$$

En remplaçant m et p par 1 dans cette expression on déduit l'atténuation du mode TE_{11}

$$\alpha = \frac{R_s}{2Z} \left[1 - \left(\frac{f_c}{f} \right)^2 \right]^{-1/2} \left[\left(\frac{f_c}{f} \right) + \frac{1}{U_{11}^2 - 1} \right] \quad (1.6.4)$$

où f_c est la fréquence de coupure du mode TE_{11} donnée par la relation suivante :

$$f_c = \frac{U_{11}}{2\pi a \sqrt{\epsilon_r}}$$

L'étude des fréquences de coupure des différents modes nous montre que le mode TE_{11} est le mode fondamental du guide circulaire. La Fig 2 nous donne l'atténuation en fonction de la fréquence pour les modes TM_{01} , TE_{11} , TE_{01} . L'atténuation du mode TE_{11} est plus faible que celle du mode TE_{01} dans les basses fréquences.

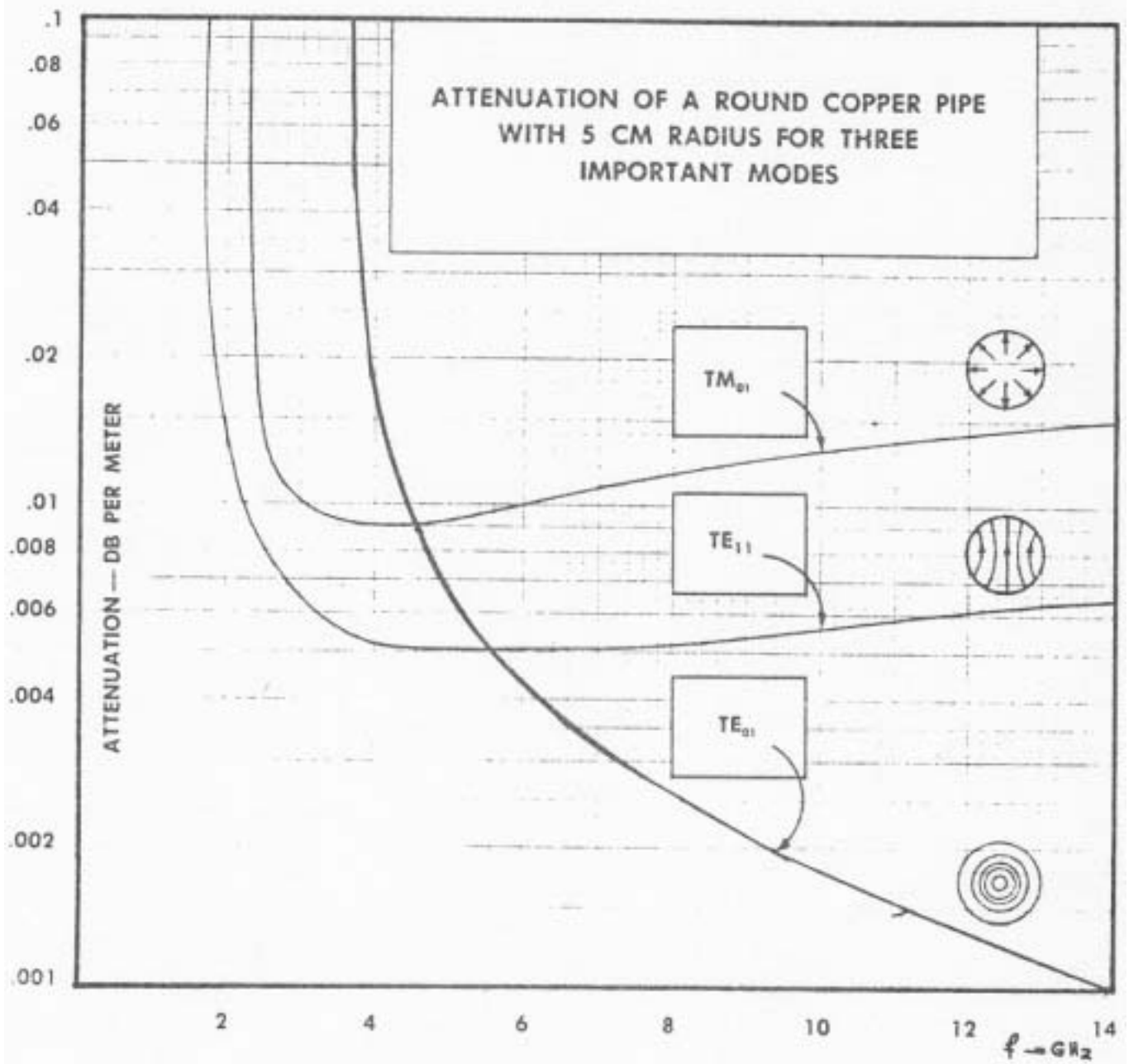


Fig 2

CHAPITRE 2

Propagation dans un guide courbé

2.1 Système de coordonnées Serret - Frenet.

Pour étudier un guide en courbure, il est commode d'introduire un système de coordonnées curvilignes dont les éléments métriques tiennent compte de la déformation géométrique.

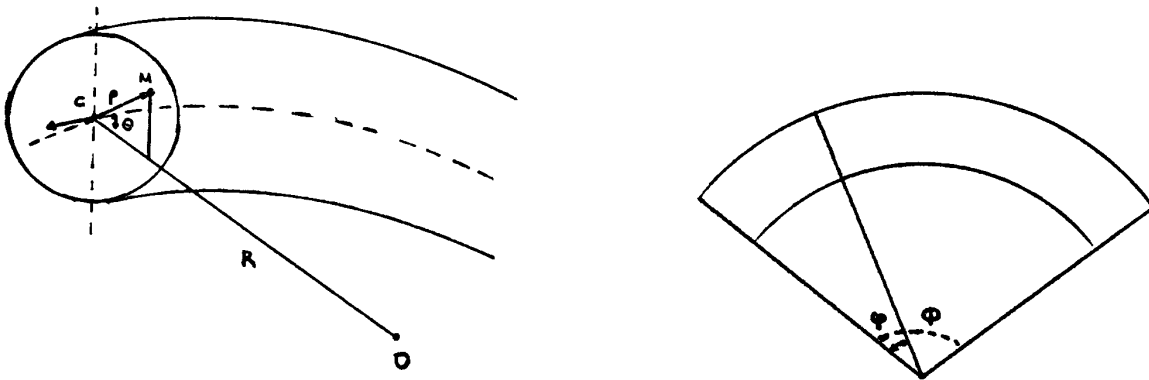


Fig. 3

Supposons un guide d'ondes circulaire de rayon intérieur a dont l'axe décrit un arc de circonférence de centre O , de rayon $R \gg a$ et d'ouverture Φ (Fig 3). Soit M un point quelconque du guide; le plan de section droite passant par M coupe l'axe en un point c . En tout point c de cette circonférence, l'angle d'ouverture est φ et l'abscisse curviligne $s = R\varphi$, la longueur totale du coude mesurée par s . Dans le système de coordonnées toroïdales de Serret - Frenet (p, θ, s) le carré de l'élément d'arc dr est donné par :

$$dr^2 = dp^2 + p^2 d\theta^2 + \left(1 - \frac{p}{R} \cos\theta\right)^2 ds^2 \quad (2.1.1)$$

et les éléments métriques sont :

$$\begin{aligned} h_p &= 1 \\ h_\theta &= p^2 \\ h_s &= 1 - \frac{p}{R} \cos\theta \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

2.2 Equations fondamentales du guide courbé

A l'aide de ces nouvelles coordonnées, les équations de Maxwell :

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{E} &= -j\omega\gamma \vec{H} \\ \text{rot } \vec{H} &= j\omega\epsilon \vec{E} \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

en régime sinusoïdal et en l'absence de charges et de courants, projetées sur le plan transversal, s'écrivent :

$$\begin{aligned} \text{grad}_t (h_s E_s) \wedge \vec{u}_s + \vec{u}_s \wedge \frac{\partial \vec{E}_t}{\partial s} &= -j\omega\gamma \vec{H}_t \\ \text{grad}_t (h_s \wedge H_s) \wedge \vec{u}_s + \vec{u}_s \wedge \frac{\partial \vec{H}_t}{\partial s} &= j\omega\epsilon \vec{E}_t \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

A partir de ces équations et en utilisant un développement des composantes transversales du champ magnétique et électrique en vecteurs propres et des composantes longitudinales en fonctions propres comme ci-dessous :

$$\begin{aligned} E_t(s,t) &= \sum_m \sum_p \alpha_{mp}(s,t) \text{grad}_t \varphi_{mp} + \sum_m \sum_p b_{mp}(s,t) \vec{u}_s \wedge \text{grad}_t \psi_{mp} \\ H_t(s,t) &= \sum_m \sum_p \alpha'_{mp}(s,t) \vec{u}_s \wedge \text{grad}_t \varphi_{mp} + \sum_m \sum_p \beta_{mp}(s,t) \text{grad}_t \psi_{mp} \\ E_s(s,t) &= \sum_m \sum_p c_{mp}(s,t) \varphi_{mp} \\ H_s(s,t) &= \sum_m \sum_p \gamma_{mp}(s,t) \psi_{mp} \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

nous obtenons six équations différentielles couplées du premier

ordre, ayant pour inconnues les coefficients du développement

Mode TM

$$\frac{\partial a_{mp}}{\partial s} + j \frac{k^2 - k_{mp}^2}{\omega \epsilon} a_{mp} = \frac{j\omega \mu}{k_{mp}^2} \iint_S \frac{P}{R} \cos \theta \vec{H}_t \cdot (\vec{u}_s \wedge \text{grad}_t \varphi_{mp}) ds - \iint_S \frac{P}{R} \cos \theta \vec{E}_s \cdot \varphi_{mp} ds$$

$$\frac{\partial a_{mp}}{\partial s} + j\omega \epsilon a_{mp} = \frac{j\omega \epsilon}{k_{mp}^2} \iint_S \frac{P}{R} \cos \theta \vec{E}_t \cdot \text{grad}_t \varphi_{mp} ds \quad (2.2.4)$$

$$a_{mp} + \frac{j\omega \epsilon}{k_{mp}^2} c_{mp} = 0$$

Mode TE

$$\frac{\partial b_{mp}}{\partial s} - j \frac{k^2 - l_{mp}^2}{\omega \mu} b_{mp} = -\frac{j\omega \epsilon}{l_{mp}^2} \iint_S \frac{P}{R} \cos \theta \vec{E}_t \cdot (\vec{u}_s \wedge \text{grad}_t \psi_{mp}) ds - \iint_S \frac{P}{R} \cos \theta \vec{H}_s \cdot \psi_{mp} ds$$

$$\frac{\partial b_{mp}}{\partial s} - j\omega \mu b_{mp} = -\frac{j\omega \mu}{l_{mp}^2} \iint_S \frac{P}{R} \cos \theta \vec{H}_t \cdot \text{grad}_t \psi_{mp} ds \quad (2.2.5)$$

$$b_{mp} - \frac{j\omega \mu}{l_{mp}^2} \gamma_{mp} = 0$$

où $k = \omega/v = \omega \sqrt{\epsilon \mu}$

k_{mp} , l_{mp} sont les valeurs propres données par les relations suivantes :

$$k_{mp} = \frac{u_{mp}}{a} \quad , \quad l_{mp} = \frac{v_{mp}}{a}$$

où u_{mp} est la m ème racine de la fonction $J_m(u_{mp}) = 0$
 et v_{mp} est la m ème racine de la fonction $J'_m(v_{mp}) = 0$
 $\vec{u}_s \wedge \text{grad}_t \varphi_{mp}$, $\text{grad}_t \varphi_{mp}$, $\vec{u}_s \wedge \text{grad}_t \psi_{mp}$, $\text{grad}_t \psi_{mp}$ sont les vecteurs propres, φ_{mp} , ψ_{mp} sont les fonctions propres qui sont données dans l'Annexe (A)

2.3 Couplage des modes

Le système d'équations précédent est valable pour un mode TE_{mp} ou TM_{mp} quelconque qui se propage dans le guide. Supposons un mode avec $m \neq 0$ et avec une orientation quelconque du vecteur électrique, qui rentre dans le guide. Ce vecteur peut se décomposer en deux vecteurs, l'un polarisé parallèlement au plan osculateur et l'autre perpendiculairement. Donc on peut avoir deux systèmes d'équations, un pour chacune des polarisations.

Dans le second membre il existe des intégrales de la forme :

$$\int_0^{2\pi} \cos n\theta \cos m\theta \cos \theta d\theta = \begin{cases} 0 & \text{pour toutes les autres valeurs} \\ n/2 & n = m \pm 1 \\ n & n = 1, m = 0, n = 0, m = 1 \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin n\theta \sin m\theta \cos \theta d\theta = \begin{cases} 0 & \text{pour toutes les autres valeurs.} \\ n/2 & n = m \pm 1 \end{cases}$$

En conséquence, la courbure introduit le couplage entre les modes qui diffèrent de ± 1 de l'indice azimuthal, c'est-à-dire qu'un mode de symétrie m ne se couple qu'avec les modes de symétrie $m \pm 1$. En conséquence le mode TE_{11} se couple avec les modes $TE_{2q}, TM_{2q}, TE_{0q}, TM_{0q}$, $q = 1, 2, \dots$

En remplaçant les expressions de vecteurs propres et de fonctions propres dans les équations différentielles précédentes nous trouvons les équations d'évolution du mode TE_{11} pour les deux polarisations, 2.3.1, 2.3.2 dans lesquelles apparaissent des intégrales

des fonctions de Bessel calculées dans l'annexe c

En remplaçant les intégrales par leurs valeurs dans les équations 2.3.1, 2.3.2 on trouve les équations 2.3.3, 2.3.4 d'où il résulte que le mode TE_{11} se couple avec les modes :

$$TE_{2q}, TM_{2q}, TMOq$$

pour la polarisation parallèle au plan de symétrie du coude et avec les modes :

$$TE_{2q}, TE_{0q}, TM_{2q}$$

pour la polarisation perpendiculaire.

Polarisation parallèle au plan de symétrie

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_{||}}{\partial s} + j \frac{k^2 - k_{||}^2}{\omega \epsilon} a_{||} = & \frac{j \omega \gamma \eta N_{||}}{2 R k_{||}^2} \sum \frac{\alpha_{2q} N_{2q}}{q} \int_0^{\alpha} \rho J_2(u_{2q} \frac{\rho}{\alpha}) J_2(u_{||} \frac{\rho}{\alpha}) d\rho + \frac{u_{2q} u_{||}}{\alpha^2} \int_0^{\alpha} \rho^2 J_1(u_{2q} \frac{\rho}{\alpha}) J_1'(u_{||} \frac{\rho}{\alpha}) d\rho] + \\ & + \frac{j \eta N_{||}}{2 R \omega \epsilon} \sum \frac{k_{2q} \alpha_{2q} N_{2q}}{q} \int_0^{\alpha} \rho J_1'(u_{2q} \frac{\rho}{\alpha}) J_1(u_{||} \frac{\rho}{\alpha}) d\rho - \frac{\alpha}{u_{2q}} \int_0^{\alpha} \rho J_1(u_{2q} \frac{\rho}{\alpha}) J_1(u_{||} \frac{\rho}{\alpha}) d\rho] + \\ & + \frac{j \omega \gamma \eta N_{||}}{R k_{||}^2} \sum \frac{\alpha_{0q} N_{0q}}{q} \frac{u_{0q} u_{||}}{\alpha^2} \int_0^{\alpha} \rho^2 J_0'(u_{0q} \frac{\rho}{\alpha}) J_1'(u_{||} \frac{\rho}{\alpha}) d\rho - \frac{j \eta N_{||}}{R \omega \epsilon} \sum \frac{k_{0q} \alpha_{0q} N_{0q}}{q} \int_0^{\alpha} \rho^2 J_0(u_{0q} \frac{\rho}{\alpha}) J_1(u_{||} \frac{\rho}{\alpha}) d\rho + \\ & \frac{j \omega \gamma \eta N_{||}}{2 R k_{||}^2} \sum \frac{\beta_{2q} M_{2q}}{q} \int_0^{\alpha} \rho J_1(u_{2q} \frac{\rho}{\alpha}) J_1(u_{||} \frac{\rho}{\alpha}) d\rho - 2 \frac{u_{||}}{\alpha} \int_0^{\alpha} \rho J_2(u_{2q} \frac{\rho}{\alpha}) J_2(u_{||} \frac{\rho}{\alpha}) d\rho] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_{||}}{\partial s} + j \omega \epsilon a_{||} = & \frac{j \omega \epsilon \eta N_{||}}{2 R k_{||}^2} \sum \frac{\alpha_{2q} N_{2q}}{q} \int_0^{\alpha} \rho J_2(u_{2q} \frac{\rho}{\alpha}) J_2(u_{||} \frac{\rho}{\alpha}) d\rho + \frac{u_{2q} u_{||}}{\alpha^2} \int_0^{\alpha} \rho^2 J_1(u_{2q} \frac{\rho}{\alpha}) J_1'(u_{||} \frac{\rho}{\alpha}) d\rho] + \\ & + \frac{j \omega \epsilon \eta N_{||}}{R k_{||}^2} \sum \frac{\alpha_{0q} N_{0q}}{q} \frac{u_{0q} u_{||}}{\alpha^2} \int_0^{\alpha} \rho^2 J_0'(u_{0q} \frac{\rho}{\alpha}) J_1'(u_{||} \frac{\rho}{\alpha}) d\rho - \\ & - \frac{j \omega \epsilon \eta N_{||}}{2 R k_{||}^2} \sum \frac{b_{2q} M_{2q}}{q} \int_0^{\alpha} \rho J_1(u_{2q} \frac{\rho}{\alpha}) J_1(u_{||} \frac{\rho}{\alpha}) d\rho - 2 \frac{u_{||}}{\alpha} \int_0^{\alpha} \rho J_2(u_{2q} \frac{\rho}{\alpha}) J_2(u_{||} \frac{\rho}{\alpha}) d\rho] \end{aligned} \quad (2.3.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial b_{||}}{\partial s} - j \frac{k^2 - \epsilon_{||}^2}{\omega \gamma} b_{||} = & - \frac{j \omega \epsilon \eta M_{||}}{2 R \epsilon_{||}^2} \sum \frac{b_{2q} M_{2q}}{q} \int_0^{\alpha} \rho J_2(u_{2q} \frac{\rho}{\alpha}) J_2(v_{||} \frac{\rho}{\alpha}) d\rho + \frac{v_{2q} v_{||}}{\alpha^2} \int_0^{\alpha} \rho^2 J_1(v_{2q} \frac{\rho}{\alpha}) J_1'(v_{||} \frac{\rho}{\alpha}) d\rho] - \\ & - \frac{j \eta M_{||}}{2 R \omega \gamma} \sum \frac{\beta_{2q} b_{2q} M_{2q}}{q} \int_0^{\alpha} \rho J_1'(v_{2q} \frac{\rho}{\alpha}) J_1(v_{||} \frac{\rho}{\alpha}) d\rho - \frac{\alpha}{v_{2q}} \int_0^{\alpha} \rho J_1(v_{2q} \frac{\rho}{\alpha}) J_1(v_{||} \frac{\rho}{\alpha}) d\rho] + \\ & + \frac{j \omega \epsilon \eta M_{||}}{2 R \epsilon_{||}^2} \sum \frac{\alpha_{2q} N_{2q}}{q} \int_0^{\alpha} \rho J_1(u_{2q} \frac{\rho}{\alpha}) J_1(v_{||} \frac{\rho}{\alpha}) d\rho - 2 \frac{v_{||}}{\alpha} \int_0^{\alpha} \rho J_2(u_{2q} \frac{\rho}{\alpha}) J_2(v_{||} \frac{\rho}{\alpha}) d\rho] + \\ & + \frac{j \omega \epsilon \eta M_{||}}{R \epsilon_{||}^2} \sum \frac{\alpha_{0q} N_{0q}}{q} \frac{u_{0q}}{\alpha} \int_0^{\alpha} \rho^2 J_0'(u_{0q} \frac{\rho}{\alpha}) J_1(v_{||} \frac{\rho}{\alpha}) d\rho \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial b_{||}}{\partial s} - j \omega \gamma b_{||} = & - \frac{j \omega \gamma \eta M_{||}}{2 R \epsilon_{||}^2} \sum \frac{\beta_{2q} M_{2q}}{q} \int_0^{\alpha} \rho J_2(u_{2q} \frac{\rho}{\alpha}) J_2(v_{||} \frac{\rho}{\alpha}) d\rho + \frac{v_{2q} v_{||}}{\alpha^2} \int_0^{\alpha} \rho^2 J_1(v_{2q} \frac{\rho}{\alpha}) J_1'(v_{||} \frac{\rho}{\alpha}) d\rho] - \\ & - \frac{j \omega \gamma \eta M_{||}}{2 R \epsilon_{||}^2} \sum \frac{\alpha_{2q} N_{2q}}{q} \int_0^{\alpha} \rho J_1(u_{2q} \frac{\rho}{\alpha}) J_1(v_{||} \frac{\rho}{\alpha}) d\rho - 2 \frac{v_{||}}{\alpha} \int_0^{\alpha} \rho J_2(u_{2q} \frac{\rho}{\alpha}) J_2(v_{||} \frac{\rho}{\alpha}) d\rho] - \\ & - \frac{j \omega \gamma \eta M_{||}}{R \epsilon_{||}^2} \sum \frac{\alpha_{0q} N_{0q}}{q} \frac{u_{0q}}{\alpha} \int_0^{\alpha} \rho^2 J_0'(u_{0q} \frac{\rho}{\alpha}) J_1(v_{||} \frac{\rho}{\alpha}) d\rho \end{aligned}$$

Polarisation perpendiculaire

$$\frac{\partial \alpha_{11}}{\partial s} + j \frac{k^2 - k_{z1}^2}{\omega \epsilon} \alpha_{11} = \frac{j \omega \gamma \eta N_{21}}{2 R k_{z1}^2} \sum_q \alpha_{2q} N_{2q} \left[2 \frac{u_{11}}{\alpha} \int_0^{\alpha} \rho J_2(u_{2q} \frac{\rho}{\alpha}) J_2(u_{11} \frac{\rho}{\alpha}) d\rho + \frac{u_{2q} u_{11}}{\alpha^2} \int_0^{\alpha} \rho^2 J_1(u_{2q} \frac{\rho}{\alpha}) J_1'(u_{11} \frac{\rho}{\alpha}) d\rho \right] +$$

$$+ \frac{j \eta N_{11}}{2 R \omega \epsilon} \sum_q k_{2q}^2 \alpha_{2q} N_{2q} \left[\int_0^{\alpha} \rho^2 J_1'(u_{2q} \frac{\rho}{\alpha}) J_1(u_{11} \frac{\rho}{\alpha}) d\rho - \frac{\alpha}{u_{2q}} \int_0^{\alpha} \rho J_1(u_{2q} \frac{\rho}{\alpha}) J_1(u_{11} \frac{\rho}{\alpha}) d\rho \right] -$$

$$\frac{j \omega \gamma \eta N_{11}}{2 R k_{z1}^2} \sum_q \beta_{2q} M_{2q} \left[\frac{v_{2q}}{\alpha} \int_0^{\alpha} \rho J_1(v_{2q} \frac{\rho}{\alpha}) J_1(u_{11} \frac{\rho}{\alpha}) d\rho - 2 \frac{u_{11}}{\alpha} \int_0^{\alpha} \rho J_2(v_{2q} \frac{\rho}{\alpha}) J_2(u_{11} \frac{\rho}{\alpha}) d\rho \right]$$

$$\frac{\partial \alpha_{11}}{\partial s} + j \omega \epsilon \alpha_{11} = \frac{j \omega \epsilon \eta N_{11}}{2 R k_{z1}^2} \sum_q \alpha_{2q} N_{2q} \left[2 \frac{u_{11}}{\alpha} \int_0^{\alpha} \rho J_2(u_{2q} \frac{\rho}{\alpha}) J_2(u_{11} \frac{\rho}{\alpha}) d\rho + \frac{u_{2q} u_{11}}{\alpha^2} \int_0^{\alpha} \rho^2 J_1(u_{2q} \frac{\rho}{\alpha}) J_1'(u_{11} \frac{\rho}{\alpha}) d\rho \right] +$$

$$+ \frac{j \omega \epsilon \eta N_{11}}{2 R k_{z1}^2} \sum_q b_{2q} M_{2q} \left[\frac{v_{2q}}{\alpha} \int_0^{\alpha} \rho J_1(v_{2q} \frac{\rho}{\alpha}) J_1(u_{11} \frac{\rho}{\alpha}) d\rho - 2 \frac{u_{11}}{\alpha} \int_0^{\alpha} \rho J_2(v_{2q} \frac{\rho}{\alpha}) J_2(u_{11} \frac{\rho}{\alpha}) d\rho \right]$$

(2.3)

$$\frac{\partial \beta_{11}}{\partial s} - j \frac{k^2 - k_{z1}^2}{\omega \mu} \beta_{11} = - \frac{j \omega \epsilon \eta M_{11}}{2 R k_{z1}^2} \sum_q b_{2q} M_{2q} \left[2 \frac{v_{11}}{\alpha} \int_0^{\alpha} \rho J_2(v_{2q} \frac{\rho}{\alpha}) J_2(v_{11} \frac{\rho}{\alpha}) d\rho + \frac{v_{2q} v_{11}}{\alpha^2} \int_0^{\alpha} \rho^2 J_1(v_{2q} \frac{\rho}{\alpha}) J_1'(v_{11} \frac{\rho}{\alpha}) d\rho \right] -$$

$$- \frac{j \eta M_{11}}{2 R \omega \mu} \sum_q b_{2q}^2 b_{2q} M_{2q} \left[\int_0^{\alpha} \rho^2 J_1'(v_{2q} \frac{\rho}{\alpha}) J_1(v_{11} \frac{\rho}{\alpha}) d\rho - \frac{\alpha}{v_{2q}} \int_0^{\alpha} \rho J_1(v_{2q} \frac{\rho}{\alpha}) J_1(v_{11} \frac{\rho}{\alpha}) d\rho \right] -$$

$$- \frac{j \omega \epsilon \eta M_{11}}{R k_{z1}^2} \sum_q b_{0q} M_{0q} \frac{v_{0q} v_{11}}{\alpha^2} \int_0^{\alpha} \rho^2 J_0(v_{0q} \frac{\rho}{\alpha}) J_1(v_{11} \frac{\rho}{\alpha}) d\rho + \frac{j \eta M_{11}}{R \omega \mu} \sum_q b_{0q}^2 b_{0q} M_{0q} \int_0^{\alpha} \rho^2 J_0(v_{0q} \frac{\rho}{\alpha}) J_1(v_{11} \frac{\rho}{\alpha}) d\rho -$$

$$- \frac{j \omega \epsilon \eta M_{11}}{2 R k_{z1}^2} \sum_q \alpha_{2q} N_{2q} \left[\frac{u_{2q}}{\alpha} \int_0^{\alpha} \rho J_1(u_{2q} \frac{\rho}{\alpha}) J_1(v_{11} \frac{\rho}{\alpha}) d\rho - 2 \frac{v_{11}}{\alpha} \int_0^{\alpha} \rho J_2(u_{2q} \frac{\rho}{\alpha}) J_2(v_{11} \frac{\rho}{\alpha}) d\rho \right]$$

$$\frac{\partial \beta_{11}}{\partial s} - j \omega \mu \beta_{11} = - \frac{j \omega \gamma \eta M_{11}}{2 R k_{z1}^2} \sum_q \beta_{2q} M_{2q} \left[2 \frac{v_{11}}{\alpha} \int_0^{\alpha} \rho J_2(v_{2q} \frac{\rho}{\alpha}) J_2(v_{11} \frac{\rho}{\alpha}) d\rho + \frac{v_{2q} v_{11}}{\alpha^2} \int_0^{\alpha} \rho^2 J_1(v_{2q} \frac{\rho}{\alpha}) J_1'(v_{11} \frac{\rho}{\alpha}) d\rho - \right.$$

$$- \frac{j \omega \gamma \eta M_{11}}{R k_{z1}^2} \sum_q \beta_{0q} M_{0q} \frac{v_{0q} v_{11}}{\alpha^2} \int_0^{\alpha} \rho^2 J_0(v_{0q} \frac{\rho}{\alpha}) J_1(v_{11} \frac{\rho}{\alpha}) d\rho +$$

$$+ \frac{j \omega \gamma \eta M_{11}}{2 R k_{z1}^2} \sum_q \alpha_{2q} N_{2q} \left[\frac{u_{2q}}{\alpha} \int_0^{\alpha} \rho J_1(u_{2q} \frac{\rho}{\alpha}) J_1(v_{11} \frac{\rho}{\alpha}) d\rho - 2 \frac{v_{11}}{\alpha} \int_0^{\alpha} \rho J_2(u_{2q} \frac{\rho}{\alpha}) J_2(v_{11} \frac{\rho}{\alpha}) d\rho \right]$$

Polarisation parallèle au plan de symétrie

$$\frac{\partial a''}{\partial s} + j \frac{k^2 - k''^2}{\omega \epsilon} \alpha'' = \frac{jZ}{R} \sum \frac{\alpha_{2q}}{q} \frac{u_{2q} [k^2 \alpha'' (u_{11}^2 + u_{2q}^2) - 2u_{11}^2 u_{2q}^2] \sqrt{\epsilon}}{2\alpha k u_{11} (u_{2q}^2 - u_{11}^2)^2} + \frac{jZ}{R} \sum \frac{\alpha_{0q}}{q} \frac{u_{0q} [k^2 \alpha'' (u_{0q}^2 + u_{11}^2) - 2u_{0q}^2 u_{11}^2]}{\alpha k u_{11} (u_{0q}^2 - u_{11}^2)^2} +$$

$$+ \frac{jZ}{R} \sum \frac{\beta_{2q}}{q} \frac{\sqrt{\epsilon} k \alpha u_{2q}}{u_{11} (u_{2q}^2 - u_{11}^2) \sqrt{u_{2q}^2 - 4}}$$

$$\frac{\partial a''}{\partial s} + j\omega \epsilon a'' = \frac{j}{RZ} \sum \frac{\alpha_{2q}}{q} \frac{\sqrt{\epsilon} k \alpha u_{2q} (u_{2q}^2 + u_{11}^2)}{2u_{11} (u_{2q}^2 - u_{11}^2)^2} + \frac{j}{RZ} \sum \frac{\alpha_{0q}}{q} \frac{\alpha k u_{0q} (u_{0q}^2 + u_{11}^2)}{u_{11} (u_{0q}^2 - u_{11}^2)^2} - \frac{j}{RZ} \sum \frac{b_{2q}}{q} \frac{\sqrt{\epsilon} k \alpha u_{2q}}{u_{11} (u_{2q}^2 - u_{11}^2) \sqrt{u_{2q}^2 - 4}} \quad (2.33)$$

$$\frac{\partial \beta''}{\partial s} - j \frac{k^2 - k''^2}{\omega \mu} b'' = \frac{j}{RZ} \sum \frac{b_{2q}}{q} \frac{u_{2q} [2k^2 \alpha'' (u_{11}^2 + u_{2q}^2 - u_{2q}^2 u_{11}^2) - u_{11}^2 u_{2q}^2 (4 - u_{2q}^2 - u_{11}^2)] \sqrt{\epsilon}}{2k \alpha u_{11} (u_{2q}^2 - u_{11}^2)^2 \sqrt{(u_{11}^2 - 1)(u_{2q}^2 - 4)}} - \frac{j}{RZ} \sum \frac{a_{2q}}{q} \frac{\sqrt{\epsilon} k \alpha u_{2q}}{2u_{11} (u_{2q}^2 - u_{11}^2) \sqrt{u_{11}^2 - 1}} -$$

$$- \frac{j}{RZ} \sum \frac{\alpha_{0q}}{q} \frac{k \alpha u_{0q}}{u_{11} (u_{0q}^2 - u_{11}^2) \sqrt{u_{11}^2 - 1}}$$

$$\frac{\partial \beta''}{\partial s} - j\omega \mu \beta'' = \frac{jZ}{R} \sum \frac{\beta_{2q}}{q} \frac{\sqrt{\epsilon} k \alpha u_{2q} (u_{11}^2 + u_{2q}^2 - u_{11}^2 u_{2q}^2)}{u_{11} (u_{2q}^2 - u_{11}^2)^2 \sqrt{u_{2q}^2 - 4}} + \frac{jZ}{R} \sum \frac{\alpha_{2q}}{q} \frac{\sqrt{\epsilon} k \alpha u_{2q}}{2u_{11} (u_{2q}^2 - u_{11}^2) \sqrt{u_{11}^2 - 1}} + \frac{jZ}{R} \sum \frac{\alpha_{0q}}{q} \frac{k \alpha u_{0q}}{u_{11} (u_{0q}^2 - u_{11}^2) \sqrt{u_{11}^2 - 1}}$$

Polarisation perpendiculaire

$$\frac{\partial a_{11}}{\partial s} + j \frac{k^2 - k_{11}^2}{\omega \epsilon} a_{11} = \frac{jZ}{R} \sum \alpha_{2q} \frac{u_{2q} [k_{\alpha}^2 (u_{2q}^2 + u_{11}^2) - 2u_{11}^2 u_{2q}^2] \sqrt{2}}{2k_{\alpha} u_{11} (u_{2q}^2 - u_{11}^2)^2} - \frac{jZ}{R} \sum \beta_{2q} \frac{\sqrt{2} k_{\alpha} u_{2q}}{u_{11} (u_{2q}^2 - u_{11}^2) \sqrt{u_{2q}^2 - 4}}$$

$$\frac{\partial a_{11}}{\partial s} + j\omega \epsilon a_{11} = \frac{j}{RZ} \sum \alpha_{2q} \frac{\sqrt{2} u_{2q} k_{\alpha} (u_{2q}^2 + u_{11}^2)}{2u_{11} (u_{2q}^2 - u_{11}^2)^2} + \frac{j}{RZ} \sum b_{2q} \frac{\sqrt{2} k_{\alpha} u_{2q}}{u_{11} (u_{2q}^2 - u_{11}^2) \sqrt{u_{2q}^2 - 4}}$$

$$\frac{\partial \beta_{11}}{\partial s} - j \frac{k^2 - k_{11}^2}{\omega \gamma} \beta_{11} = \frac{j}{RZ} \sum b_{2q} \frac{\sqrt{2} u_{2q} [2k_{\alpha}^2 (u_{11}^2 + u_{2q}^2 - u_{2q}^2 u_{11}^2) - u_{11}^2 u_{2q}^2 (4 - u_{2q}^2 - u_{11}^2)]}{2k_{\alpha} u_{11} (u_{2q}^2 - u_{11}^2)^2 \sqrt{(u_{11}^2 - 1)(u_{2q}^2 - 4)}} + \frac{j}{RZ} \sum b_{0q} \frac{u_{11} u_{0q} (u_{0q}^2 + u_{11}^2 - 2k_{\alpha}^2)}{k_{\alpha} (u_{0q}^2 - u_{11}^2) \sqrt{u_{11}^2 - 1}} +$$

(2.3.4)

$$+ \frac{j}{RZ} \sum \alpha_{2q} \frac{\sqrt{2} k_{\alpha} u_{2q}}{2u_{11} (u_{2q}^2 - u_{11}^2) \sqrt{u_{11}^2 - 1}}$$

$$\frac{\partial \beta_{11}}{\partial s} - j\omega \gamma \beta_{11} = \frac{jZ}{R} \sum \beta_{2q} \frac{u_{2q} k_{\alpha} (u_{11}^2 + u_{2q}^2 - u_{11}^2 u_{2q}^2) \sqrt{2}}{u_{11} (u_{2q}^2 - u_{11}^2)^2 \sqrt{(u_{11}^2 - 1)(u_{2q}^2 - 4)}} - \frac{jZ}{R} \sum \beta_{0q} \frac{2k_{\alpha} u_{0q} u_{11}}{(u_{0q}^2 - u_{11}^2) \sqrt{u_{11}^2 - 1}} -$$

$$- \frac{jZ}{R} \sum \alpha_{2q} \frac{\sqrt{2} k_{\alpha} u_{2q}}{2u_{11} (u_{2q}^2 - u_{11}^2) \sqrt{u_{11}^2 - 1}}$$

CHAPITRE 3

Résolution des systèmes d'équations

3.1 Polarisation perpendiculaire au plan de symétrie

Pour faciliter l'étude du système on pose :

$$A_{2q}'' = \frac{jZ u_{2q} [k^2 a^2 (u_{2q}^2 + u_n^2) - 2u_n^2 u_{2q}^2] \sqrt{2}}{2k a u_n (u_{2q}^2 - u_n^2)^2}$$

$$A_{2q}^{12} = \frac{jZ k a u_{2q} \sqrt{2}}{u_n (u_{2q}^2 - u_n^2) \sqrt{u_{2q}^2 - 4}}$$

$$A_{2q}^{21} = \frac{j u_{2q} k a (u_{2q}^2 + u_n^2) \sqrt{2}}{2Z u_n (u_{2q}^2 - u_n^2)^2}$$

$$A_{2q}^{22} = \frac{j k a u_{2q} \sqrt{2}}{2 u_n (u_{2q}^2 - u_n^2) \sqrt{u_{2q}^2 - 4}}$$

$$B_{0q}^{01} = \frac{j u_{2q} [2k^2 a^2 (v_n^2 + v_{2q}^2 - v_{2q}^2 v_n^2) - v_n^2 v_{2q}^2 (4 - v_{2q}^2 - v_n^2)] \sqrt{2}}{2Z k a v_n (v_{2q}^2 - v_n^2)^2 \sqrt{(v_n^2 - 1)(v_{2q}^2 - 4)}}$$

$$B_{2q}'' = \frac{j v_n v_{0q} (v_{0q}^2 + v_n^2 - 2k^2 a^2)}{Z k a (v_{0q}^2 - v_n^2)^2 \sqrt{v_n^2 - 1}}$$

$$B_{2q}^{12} = \frac{j k a u_{2q} \sqrt{2}}{2Z v_n (u_{2q}^2 - v_n^2) \sqrt{v_n^2 - 1}}$$

$$B_{0q}^{10} = \frac{jZ v_{2q} k a (v_n^2 + v_{2q}^2 - v_n^2 v_{2q}^2) \sqrt{2}}{v_n (v_{2q}^2 - v_n^2)^2 \sqrt{(v_n^2 - 1)(v_{2q}^2 - 4)}}$$

$$B_{2q}^{21} = \frac{2jZ k a v_n v_{0q}}{(v_{0q}^2 - v_n^2)^2 \sqrt{v_n^2 - 1}}$$

$$B_{2q}^{22} = \frac{jZ k a u_{2q} \sqrt{2}}{2 v_n (u_{2q}^2 - v_n^2) \sqrt{v_n^2 - 1}}$$

Donc nous avons le système suivant :

$$\frac{\partial a_{11}}{\partial s} + j \frac{V_{11}^2}{\omega \varepsilon} a_{11} = \frac{1}{R} \sum_q \alpha_{2q} A_{2q}'' - \frac{1}{R} \sum_q \beta_{2q} A_{2q}''^2$$

$$\frac{\partial a_{10}}{\partial s} + j \omega \varepsilon a_{10} = \frac{1}{R} \sum_q \alpha_{2q} A_{2q}'^2 + \frac{1}{R} \sum_q b_{2q} A_{2q}''^2$$

(3.1)

$$\frac{\partial \beta_{11}}{\partial s} - j \frac{\delta_{11}^2}{\omega \mu} \beta_{11} = \frac{1}{R} \sum_q \beta_{0q} B_{0q}'' + \frac{1}{R} \sum_q b_{2q} B_{2q}'' + \frac{1}{R} \sum_q \alpha_{2q} B_{2q}''^2$$

$$\frac{\partial \beta_{10}}{\partial s} - j \omega \mu \beta_{10} = -\frac{1}{R} \sum_q \beta_{0q} B_{0q}'^2 + \frac{1}{R} \sum_q \beta_{2q} B_{2q}'^2 - \frac{1}{R} \sum_q \alpha_{2q} B_{2q}''^2$$

3.1.1 Méthode de perturbation - méthode de Poincaré

La recherche des ondes, pouvant se propager dans le guide, se ramène à la résolution du système précédent. La solution rigoureuse du problème présente de grandes difficultés. Nous nous proposons d'en donner une solution approchée valable pour les faibles courbures.

Désignons par $G(s,t)$ un terme quelconque de $a_{nq}, d_{nq}, \beta_{nq}, b_{nq}$ où $(n = 0, 1, 2, \dots)$. Supposons-le développable en série entière suivant les puissances croissantes de la courbure et posons :

$$G(s,t) = G^{(0)}(s,t) + \frac{1}{R} G^{(1)}(s,t) + \frac{1}{R^2} G^{(2)}(s,t) + \dots + \frac{1}{R^n} G^{(n)}(s,t) \quad (3.1.1)$$

Si l'on parvient à calculer les $n+1$ premiers termes des développements (), on dira qu'on a résolu le problème à l'approximation d'ordre n . Il y a lieu d'opérer de proche en proche, en commençant par l'approximation d'ordre (0), en continuant par celle d'ordre (1), puis par celle d'ordre (2), et ainsi de suite. Nous nous limiterons d'ailleurs ici à l'approximation d'ordre (2), c'est-à-dire au calcul des termes indépendants de R , celui des termes en $\frac{1}{R}$ et à celui des termes en $\frac{1}{R^2}$.

En plus, pour éviter les termes séculaires qui vont apparaître dans la résolution des équations d'ordre (1) et d'ordre (2) suivant la méthode de Poincaré [L] on pose:

$$s = s^* \left(1 + \frac{1}{R} E_1 + \frac{1}{R^2} E_2 \right) \quad (3.1.2)$$

avec E_1, E_2 constantes qu'on va calculer.

En remplaçant les développements 3.1.1, 3.1.2 dans le système (3.1) et en dérivant par rapport à s^* on trouve trois nouveaux systèmes qui correspondent à l'ordre (0), (1), (2)

3.1.2 Approximation d'ordre (0)

A l'approximation d'ordre zéro, on est ramené au cas bien connu du guide rectiligne, dans lequel ne se propage que le mode TE_{11} . Rappelons rapidement les résultats.

Nous avons les équations suivantes:

$$a_{11}^{(0)} = a_{11}^{(0)} = 0$$

$$\frac{\partial^2 p_{11}^{(0)}}{\partial s^2} + \gamma_{11}^2 p_{11}^{(0)} = 0$$

$$\frac{\partial^2 b_{11}^{(0)}}{\partial s^2} + \gamma_{11}^2 b_{11}^{(0)} = 0$$

Les solutions pour les deux équations sont:

$$p_{11}^{(0)}(s^*) = \beta_0 e^{-j\gamma_{11}s^*}$$

$$b_{11}^{(0)}(s^*) = b_0 e^{-j\gamma_{11}s^*}$$

où b_0, β_0 constantes prés. Entre ces deux constantes existe la relation:

$$\frac{b_0}{\beta_0} = -Z \frac{k}{\gamma_{11}}$$

où $Z = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$ l'impédance d'onde et $k = \omega \sqrt{\epsilon \mu}$

3.1.3 Approximation d'ordre (1)

Pour l'approximation d'ordre (1) on trouve le système suivant :

$$\frac{\partial a_{11}^{(1)}}{\partial s^*} + j \frac{v_{11}^2}{\omega \epsilon} (E_1 \alpha_{11}^{(0)} + \alpha_{11}^{(1)}) = \sum_q \alpha_{2q}^{(0)} A_{2q}'' - \sum_q \beta_{2q}^{(0)} A_{2q}''$$

$$\frac{\partial \alpha_{11}^{(1)}}{\partial s^*} + j \omega \epsilon (E_1 \alpha_{11}^{(0)} + \alpha_{11}^{(1)}) = \sum_q \alpha_{2q}^{(0)} A_{2q}^{21} + \sum_q b_{2q}^{(0)} A_{2q}^{22} \quad (3.1.3.1)$$

$$\frac{\partial \beta_{11}^{(1)}}{\partial s^*} - j \frac{\gamma_{11}^2}{\omega \gamma} (E_1 b_{11}^{(0)} + b_{11}^{(1)}) = \sum_q b_{0q}^{(0)} B_{0q}^{10} + \sum_q b_{2q}^{(0)} B_{2q}^{11} + \sum_q \alpha_{2q}^{(0)} B_{2q}^{12}$$

$$\frac{\partial b_{11}^{(1)}}{\partial s^*} - j \omega \gamma (E_1 \beta_{11}^{(0)} + \beta_{11}^{(1)}) = - \sum_q \beta_{0q}^{(0)} B_{0q}^{10} + \sum_q \beta_{2q}^{(0)} B_{2q}^{21} - \sum_q \alpha_{2q}^{(0)} B_{2q}^{22}$$

Dans le cas d'ordre (0) c'est-à-dire dans le guide rectiligne, ne se propage que le mode TE₁₁. Donc :

$$\alpha_{11}^{(0)} = 0, \quad \alpha_{2q}^{(0)} = 0, \quad \beta_{2q}^{(0)} = 0, \quad \beta_{0q}^{(0)} = 0$$

$$\alpha_{11}^{(0)} = 0, \quad \alpha_{2q}^{(0)} = 0, \quad b_{2q}^{(0)} = 0, \quad b_{0q}^{(0)} = 0$$

le système précédent devient :

$$a) \quad \frac{\partial a_{11}^{(1)}}{\partial s^*} + j \frac{v_{11}^2}{\omega \epsilon} \alpha_{11}^{(1)} = 0$$

$$b) \quad \frac{\partial \alpha_{11}^{(1)}}{\partial s^*} + j \omega \epsilon \alpha_{11}^{(1)} = 0 \quad (3.1.3.2)$$

$$c) \quad \frac{\partial \beta_{11}^{(1)}}{\partial s^*} - j \frac{\gamma_{11}^2}{\omega \gamma} b_{11}^{(1)} = j \frac{\gamma_{11}^2}{\omega \gamma} E_1 b_{11}^{(0)}$$

$$d) \quad \frac{\partial b_{11}^{(1)}}{\partial s^*} - j \omega \gamma \beta_{11}^{(1)} = j \omega \gamma E_1 \beta_{11}^{(0)}$$

A partir de (c), (d) on trouve :

$$\frac{\partial^2 \beta_{11}^{(1)}}{\partial s^{2*}} + \gamma_{11}^2 \beta_{11}^{(1)} = -2\gamma_{11}^2 \beta_0 \epsilon_1 e^{-j\gamma_{11}s^*}$$

$$\frac{\partial^2 b_{11}^{(1)}}{\partial s^{2*}} + \gamma_{11}^2 b_{11}^{(1)} = -2\gamma_{11}^2 b_0 \epsilon_1 e^{-j\gamma_{11}s^*}$$

Pour éviter les termes séculaires, il faut :

$$\epsilon_1 = 0$$

Donc à l'approximation d'ordre (1) on retrouve les mêmes équations que dans le guide rectiligne, dans lequel il n'y a pas perturbation d'ordre (1). En conséquence :

$$a_{11}^{(1)} = 0 \quad b_{11}^{(1)} = 0$$

$$d_{11}^{(1)} = 0 \quad \beta_{11}^{(1)} = 0$$

Ces dernières relations montrent que dans le guide courbé il n'y a pas de perturbation d'ordre (1) du mode TE_{11} . Par contre à partir des équations 2.2.4, 2.2.5 on trouve que le mode $TE_{11}^{(0)}$ excite les modes $TM_{2q}^{(1)}, TE_{2q}^{(1)}, TE_{0q}^{(1)}$

$$\frac{\partial a_{2q}^{(1)}}{\partial s^*} + j \frac{v_{2q}^2}{\omega \epsilon} a_{2q}^{(1)} = j\omega \mu \beta_{11}^{(0)} F_q$$

$$\frac{\partial d_{2q}^{(1)}}{\partial s^*} + j\omega \epsilon a_{2q}^{(1)} = -j\omega \epsilon b_{11}^{(0)} F_q$$

$$\frac{\partial \beta_{2q}^{(1)}}{\partial s^*} - j \frac{\gamma_{2q}^2}{\omega \mu} b_{2q}^{(1)} = \frac{j}{\omega \mu} b_{11}^{(0)} f_q \quad (3.1.3.3)$$

$$\frac{\partial b_{2q}^{(1)}}{\partial s^*} - j\omega \mu \beta_{2q}^{(1)} = j\omega \mu \beta_{11}^{(0)} g_q$$

$$\frac{\partial b_{0q}^{(1)}}{\partial s^*} - j\omega \mu \beta_{0q}^{(1)} = -j\omega \mu \beta_{11}^{(0)} h_q$$

$$\frac{\partial \beta_{0q}^{(1)}}{\partial s^*} - j \frac{\gamma_{0q}^2}{\omega \mu} b_{0q}^{(1)} = \frac{j}{\omega \mu} b_{11}^{(0)} e_q$$

où les coefficients F_q, f_q, g_q, h_q, e_q sont reliés avec les coefficients B_{2q}^{ns}, B_{0q}^{rp} $n = 1, 2$ $s = 1, 2$, $r = 0, 1$, $p = 0, 1$. par les relations suivantes:

$$B_{2q}^{11} = \frac{j}{\omega \mu} \frac{V_{2q}^2}{V_{11}^2} f_q$$

$$B_{2q}^{21} = j\omega \mu \frac{V_{2q}^2}{V_{11}^2} g_q$$

$$B_{2q}^{12} = j\omega \epsilon \frac{U_{2q}^2}{V_{11}^2} F_q$$

(3.1.3.4)

$$B_{2q}^{22} = j\omega \mu \frac{U_{2q}^2}{V_{11}^2} F_q$$

$$B_{0q}^{01} = \frac{2j}{\omega \mu} \frac{V_{0q}^2}{V_{11}^2} e_q$$

$$B_{0q}^{10} = 2j\omega \mu \frac{V_{0q}^2}{V_{11}^2} h_q$$

A partir des équations(3.1.3.3)on trouve les équations suivantes :

$$\frac{\partial^2 \alpha_{2q}^{(1)}}{\partial s^2} + \nu_{2q}^2 \alpha_{2q}^{(1)} = -(\nu_{2q}^2 + \gamma_{11}^2) F_q b_{11}^{(0)}$$

$$\frac{\partial^2 \alpha_{2q}^{(1)}}{\partial s^2} + \nu_{2q}^2 \alpha_{2q}^{(1)} = 2K^2 F_q \beta_{11}^{(0)}$$

$$\frac{\partial^2 \beta_{2q}^{(1)}}{\partial s^2} + \gamma_{2q}^2 \beta_{2q}^{(1)} = -(f_q + \gamma_{2q}^2 g_q) b_{11}^{(0)} \quad (3.1.3.5)$$

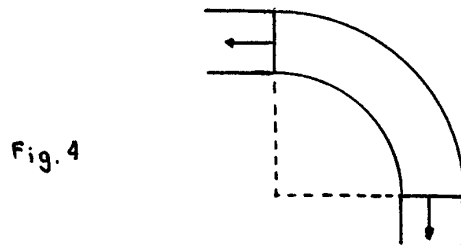
$$\frac{\partial^2 b_{2q}^{(1)}}{\partial s^2} + \gamma_{2q}^2 b_{2q}^{(1)} = -(f_q + \gamma_{11}^2 g_q) b_{11}^{(0)}$$

$$\frac{\partial^2 \beta_{0q}^{(1)}}{\partial s^2} + \gamma_{0q}^2 \beta_{0q}^{(1)} = (-e_q + \gamma_{0q}^2 h_q) \beta_{11}^{(0)}$$

$$\frac{\partial^2 b_{0q}^{(1)}}{\partial s^2} + \gamma_{0q}^2 b_{0q}^{(1)} = (-e_q + \gamma_{11}^2 h_q) b_{11}^{(0)}$$

3.1.4 conditions aux limites

On résoud ces équations en utilisant certaines conditions aux limites. Considérons que le coude à l'entrée et à la sortie est raccordé à un guide rectiligne (Fig 4)



Compte tenu que les champs et leurs dérivées par rapport à s^* sont continus à l'entrée $s = s^* = 0$ et à la sortie $s_1^* = s_1 / (1 + \frac{1}{R^2} E_2)$, une onde qui se propage dans la direction de s^* croissant, c'est-à-dire dans le sens $e^{j\gamma_{nq}s^*}$, vérifie à la sortie du coude l'équation :

$$\dot{a}_{nq}(s_1^*) = -j\gamma_{nq} a_{nq}(s_1^*)$$

À l'entrée du coude on doit avoir :

$$\dot{a}_{nq}(0) = j\gamma_{nq} a_{nq}(0)$$

On obtient des relations similaires pour $a_{nq}, b_{nq}, \beta_{nq}$. La deuxième équation n'est pas valable pour l'expression de $TE_{11}^{(0)}$

Ces conditions nous permettent de trouver l'onde réfléchie créée par le coude et l'onde incidente à la sortie.

Compte tenu de ces conditions aux limites, les solutions des équations 3.1.35 s'écrivent :

$$a_{2q}^{(1)}(s^*) = \frac{\gamma_{2q}^2 + \gamma_{11}^2}{2(\gamma_{2q}^2 - \gamma_{11}^2)} F_q b_0 \left[\left(1 + \frac{\gamma_{11}}{\gamma_{2q}}\right) e^{-j\gamma_{2q}s^*} + \left(1 - \frac{\gamma_{11}}{\gamma_{2q}}\right) e^{-j\gamma_{11}s_1^*} e^{j\gamma_{2q}(s^* - s_1^*)} - 2e^{-j\gamma_{11}s^*} \right]$$

$$a_{2q}^{(2)}(s^*) = -\frac{k^2}{\gamma_{2q}^2 - \gamma_{11}^2} F_q \beta_0 \left[\left(1 + \frac{\gamma_{11}}{\gamma_{2q}}\right) e^{-j\gamma_{2q}s^*} + \left(1 - \frac{\gamma_{11}}{\gamma_{2q}}\right) e^{-j\gamma_{11}s_1^*} e^{j\gamma_{2q}(s^* - s_1^*)} - 2e^{-j\gamma_{11}s^*} \right]$$

$$\beta_{2q}^{(1)}(s^*) = \frac{f_q + \delta_{2q}^2 g_q}{2(\delta_{2q}^2 - \delta_{11}^2)} \beta_0 \left[\left(1 + \frac{\delta_{11}}{\delta_{2q}}\right) e^{-j\delta_{2q}s^*} + \left(1 - \frac{\delta_{11}}{\delta_{2q}}\right) e^{-j\delta_{11}s_1^*} e^{j\delta_{2q}(s^* - s_1^*)} - 2e^{-j\delta_{11}s^*} \right]$$

$$b_{2q}^{(1)}(s^*) = \frac{f_q + \delta_{11}^2 g_q}{2(\delta_{2q}^2 - \delta_{11}^2)} b_0 \left[\left(1 + \frac{\delta_{11}}{\delta_{2q}}\right) e^{j\delta_{2q}s^*} + \left(1 - \frac{\delta_{11}}{\delta_{2q}}\right) e^{-j\delta_{11}s_1^*} e^{j\delta_{2q}(s^* - s_1^*)} - 2e^{-j\delta_{11}s^*} \right]$$

3.1.4.1)

$$\beta_{0q}^{(1)}(s^*) = \frac{e_q - \delta_{0q}^2 h_q}{2(\delta_{0q}^2 - \delta_{11}^2)} \beta_0 \left[\left(1 + \frac{\delta_{11}}{\delta_{0q}}\right) e^{-j\delta_{0q}s^*} + \left(1 - \frac{\delta_{11}}{\delta_{0q}}\right) e^{-j\delta_{11}s_1^*} e^{j\delta_{0q}(s^* - s_1^*)} - 2e^{-j\delta_{11}s^*} \right]$$

$$b_{0q}^{(1)}(s^*) = \frac{e_q - \delta_{11}^2 h_q}{2(\delta_{0q}^2 - \delta_{11}^2)} b_0 \left[\left(1 + \frac{\delta_{11}}{\delta_{0q}}\right) e^{-j\delta_{0q}s^*} + \left(1 - \frac{\delta_{11}}{\delta_{0q}}\right) e^{-j\delta_{11}s_1^*} e^{j\delta_{0q}(s^* - s_1^*)} - 2e^{-j\delta_{11}s^*} \right]$$

3.1.5 Approximation d'ordre (2)

Pour l'approximation d'ordre (2) on trouve le système suivant :

$$\frac{\partial \alpha_{11}^{(2)}}{\partial s^*} + j \frac{\gamma_{11}^2}{\omega \varepsilon} \alpha_{11}^{(2)} = \sum_q \alpha_{2q}^{(1)} A_{2q}^{11} - \sum_q \beta_{2q}^{(1)} A_{2q}^{12}$$

$$\frac{\partial \alpha_{11}^{(2)}}{\partial s^*} + j \omega \varepsilon \alpha_{11}^{(2)} = \sum_q \alpha_{2q}^{(1)} A_{2q}^{21} + \sum_q b_{2q}^{(1)} A_{2q}^{22}$$

(3.1.5.1)

$$\frac{\partial \beta_{11}^{(2)}}{\partial s^*} - j \frac{\delta_{11}^2}{\omega \mu} b_{11}^{(2)} = j \frac{\delta_{11}^2}{\omega \mu} E_2 b_{11}^{(0)} + \sum_q b_{0q}^{(1)} B_{0q}^{10} + \sum_q b_{2q}^{(1)} B_{2q}^{11} + \sum_q \alpha_{2q}^{(1)} B_{2q}^{12}$$

$$\frac{\partial b_{11}^{(2)}}{\partial s^*} - j \omega \mu b_{11}^{(2)} = j \omega \mu E_2 \beta_{11}^{(0)} - \sum_q \beta_{0q}^{(1)} B_{0q}^{10} + \sum_q \beta_{2q}^{(1)} B_{2q}^{11} - \sum_q \alpha_{2q}^{(1)} B_{2q}^{12}$$

A partir des deux dernières équations du système (3.1.5.1) on peut tirer les équations suivantes :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^3 \beta''}{\partial s^3} + \gamma''^2 \beta'' &= -2 \varepsilon_2 \gamma''^2 \beta'' + \sum \frac{1}{q} \left\{ \left(\frac{\partial b''}{\partial s} \beta'' - j \frac{\delta''}{\omega \mu} \beta'' \right) + \left(\frac{\partial b''}{\partial s} \beta'' - j \frac{\delta''}{\omega \mu} \beta'' \right) + \left(\frac{\partial a''}{\partial s} \beta'' + j \frac{\delta''}{\omega \mu} \beta'' \right) \right\} \\
 \frac{\partial^3 b''}{\partial s^3} + \gamma''^2 b'' &= -2 \varepsilon_2 \gamma''^2 b'' + \sum \frac{1}{q} \left\{ \left(j \omega \mu b'' - \frac{\partial \beta''}{\partial s} \beta'' \right) + \left(j \omega \mu b'' - \frac{\partial \beta''}{\partial s} \beta'' \right) + \left(j \omega \mu b'' + \frac{\partial \beta''}{\partial s} \beta'' \right) \right\}
 \end{aligned}
 \tag{3.1.5.2}$$

En remplaçant les équations (3.1.41) dans (3.152) et en éliminant les termes séculaires, on obtient l'expression de E_z et ensuite les solutions des deux équations précédentes à l'entrée et à la sortie du coude

$$E_z = \frac{1}{\gamma''^2 \nu''^2} \sum \frac{1}{q} \left\{ \frac{\nu''^2 h_q}{\gamma''^2 h_q} \left(\frac{e_q}{h_q} - 2 \frac{e_q}{h_q} \gamma''^2 + \gamma''^2 \delta'' \right) + \frac{\nu''^2 g_q}{2(\gamma''^2 - \delta''^2)} \left(\frac{f_q}{g_q} + 2 \frac{f_q}{g_q} \gamma''^2 + \gamma''^2 \delta'' \right) + \frac{F_q^2 \nu''^2}{2(\nu''^2 - \gamma''^2)} (\nu''^2 + 3\gamma''^2) \right\}$$

$$\begin{aligned}
 \beta''(0) &= \frac{\beta_0}{2\nu''^2 \gamma''} \sum \frac{1}{q} \left\{ \frac{\nu''^2 (e_q - \gamma''^2 h_q)(e_q - \delta''^2 h_q)}{\gamma'' \nu'' (\gamma''^2 - \delta''^2)} \left[2 e^{-j(\delta'' \nu'' + \gamma''^2) s} - e^{-2j\delta'' s} \right] + \frac{\nu''^2 (f_q + \gamma''^2 g_q)(f_q + \delta''^2 g_q)}{2\gamma'' \nu'' (\gamma''^2 - \delta''^2)} \left[2 e^{-j(\delta'' \nu'' + \gamma''^2) s} - e^{-2j\delta'' s} \right] \right\} + \\
 &+ \frac{\nu''^2 k^2 F_q^2 (\nu''^2 + \gamma''^2)}{\nu'' \nu'' (\nu''^2 - \delta''^2)} \left[2 e^{-j(\nu''^2 + \delta''^2) s} - e^{-2j\delta'' s} \right]
 \end{aligned}
 \tag{3.1.5.3}$$

$$\begin{aligned}
 \beta''(s_1) &= \frac{\beta_0}{2\nu''^2 \gamma''} \sum \frac{1}{q} \left\{ \frac{\nu''^2 (e_q - \delta''^2 h_q)(e_q - \gamma''^2 h_q)}{(\gamma''^2 - \delta''^2)^2} \gamma'' \left[\left(1 + \frac{\gamma''}{\delta''} \right)^2 e^{j(\delta'' - \gamma'' \delta'') s_1} + \left(1 - \frac{\gamma''}{\delta''} \right)^2 e^{-j(\delta'' + \gamma'' \delta'') s_1} \right] + \right. \\
 &+ \frac{\nu''^2 (f_q + \gamma''^2 g_q)(f_q + \delta''^2 g_q)}{2(\gamma''^2 - \delta''^2)^2} \gamma'' \left[\left(1 + \frac{\gamma''}{\delta''} \right)^2 e^{j(\delta'' - \gamma'' \delta'') s_1} + \left(1 - \frac{\gamma''}{\delta''} \right)^2 e^{-j(\delta'' + \gamma'' \delta'') s_1} \right] + \\
 &+ \frac{\nu''^2 k^2 F_q^2 (\nu''^2 + \gamma''^2)}{(\nu''^2 - \gamma''^2)^2} \nu'' \gamma'' \left[\left(1 + \frac{\gamma''}{\nu''} \right)^2 e^{j(\delta'' - \nu'' \delta'') s_1} + \left(1 - \frac{\gamma''}{\nu''} \right)^2 e^{-j(\delta'' + \nu'' \delta'') s_1} \right] \left. \right\} e^{-j\delta'' s_1}
 \end{aligned}$$

$$b''(0) = -\frac{ZK}{\gamma''} \beta''(0) \quad , \quad b''(s_1) = -\frac{ZK}{\gamma''} \beta''(s_1)$$

Pour la résolution des équations 3.152 on tenu compte des conditions à l'entrée et à la sortie du coude. Les relations données par 3.153 permettent de déterminer les coefficients de réflexion et de transmission du coude. Dans ces expressions γ'_{11} , γ'_{0q} , γ'_{2q} , ν'_{2q} sont les constantes de propagation perturbées.

$$\gamma'_{11} = \frac{\gamma_{11}}{1 + \frac{1}{R^2} \epsilon_2} \quad \text{mode TE}_{11}$$

$$\gamma'_{0q} = \frac{\gamma_{0q}}{1 + \frac{1}{R^2} \epsilon_2} \quad \text{mode TE}_{0q}$$

$$\gamma'_{2q} = \frac{\gamma_{2q}}{1 + \frac{1}{R^2} \epsilon_2} \quad \text{mode TE}_{2q}$$

$$\nu'_{2q} = \frac{\nu_{2q}}{1 + \frac{1}{R^2} \epsilon_2} \quad \text{mode TM}_{2q}$$

3.2 Polarisation parallèle au plan de symétrie

Dans le cas de polarisation suivant le plan de symétrie on trouve le système ci-dessous :

$$\frac{\partial \alpha_{11}}{\partial s^2} + j \frac{\gamma_{11}^2}{\omega \epsilon} \alpha_{11} = \frac{1}{R} \sum_q \alpha_{0q} A_{0q}^{01} + \frac{1}{R} \sum_q \alpha_{2q} A_{2q}^{11} + \frac{1}{R} \sum_q \beta_{2q} A_{2q}^{12}$$

$$\frac{\partial \alpha_{11}}{\partial s^2} + j \omega \epsilon \alpha_{11} = \frac{1}{R} \sum_q \alpha_{0q} A_{0q}^{10} + \frac{1}{R} \sum_q \alpha_{2q} A_{2q}^{21} - \frac{1}{R} \sum_q \beta_{2q} A_{2q}^{22} \quad (3.2.1)$$

$$\frac{\partial \beta_{11}}{\partial s} - j \frac{\gamma_{11}^2}{\omega \mu} \beta_{11} = -\frac{1}{R} \sum_q \alpha_{0q} D_{0q}^{01} + \frac{1}{R} \sum_q \beta_{2q} B_{2q}^{11} - \frac{1}{R} \sum_q \alpha_{2q} B_{2q}^{12}$$

$$\frac{\partial \beta_{11}}{\partial s} - j \omega \mu \beta_{11} = \frac{1}{R} \sum_q \alpha_{0q} D_{0q}^{10} + \frac{1}{R} \sum_q \beta_{2q} B_{2q}^{21} + \frac{1}{R} \sum_q \alpha_{2q} B_{2q}^{22}$$

où on a posé :

$$A_{0q}^{01} = \frac{jZ u_{0q} [k^2 a^2 (u_{0q}^2 + u_{11}^2) - 2 u_{0q} u_{11}^2]}{\alpha k u_{11} (u_{0q}^2 - u_{11}^2)^2}$$

$$A_{0q}^{10} = \frac{j \alpha k u_{0q} (u_{0q}^2 + u_{11}^2)}{Z u_{11} (u_{0q}^2 - u_{11}^2)^2}$$

$$D_{0q}^{01} = \frac{j k \alpha u_{0q}}{Z v_{11} (u_{0q}^2 - v_{11}^2) \sqrt{v_{11}^2 - 1}}$$

$$D_{0q}^{10} = \frac{j Z k \alpha u_{0q}}{v_{11} (u_{0q}^2 - v_{11}^2) \sqrt{v_{11}^2 - 1}}$$

Les autres coefficients restent identiques avec les coefficients de polarisation perpendiculaire au plan de symétrie.

Pour résoudre le système précédent, nous suivons le même processus que pour l'autre polarisation. D'après la méthode de perturbation et la méthode de Poincaré, en posant :

$$S = S^* \left(L + \frac{1}{R} E_1 + \frac{1}{R^2} E_2 \right)$$

on trouve des résultats identiques pour l'approximation d'ordre zéro et un, avec la première polarisation. c'est-à-dire, pour l'approximation d'ordre (0) on retrouve les équations du guide rectiligne et pour l'approximation d'ordre (1) on trouve $E_1 = 0$ qui implique l'absence de perturbation d'ordre (1) du mode TE_{11} dans le guide. Par contre à partir des équations on trouve que le mode $TE_{11}^{(0)}$ excite les modes $TE_{2q}^{(1)}$, $TM_{2q}^{(1)}$, $TM_{0q}^{(1)}$. Pour le mode $TM_{0q}^{(1)}$ on trouve:

$$\frac{\partial a_{0q}^{(1)}}{\partial S^*} + j \frac{v_{0q}^2}{\omega \epsilon} \alpha_{0q}^{(1)} = -j \omega \gamma \beta_{11}^{(0)} d_q \quad (3.2.2)$$

$$\frac{\partial \alpha_{0q}^{(1)}}{\partial S^*} + j \omega \epsilon \alpha_{0q}^{(1)} = j \omega \epsilon b_{11}^{(0)} d_q$$

où le coefficient d_q est relié aux coefficients D_{0q}^{01} et D_{0q}^{10} par les relations:

$$D_{0q}^{01} = 2j \omega \epsilon \frac{u_{0q}^2}{v_{11}^2} d_q \quad (3.2.3)$$

$$D_{0q}^{10} = 2j \omega \gamma \frac{u_{0q}^2}{v_{11}^2} d_q$$

A partir des équations 3.2.2 on trouve les équations suivantes:

$$\frac{\partial^2 a_{2q}^{(1)}}{\partial S^{*2}} + v_{0q}^2 \alpha_{0q}^{(1)} = (v_{0q}^2 + \gamma_{11}^2) d_q b_{11}^{(0)} \quad (3.2.4)$$

$$\frac{\partial^2 \alpha_{0q}^{(1)}}{\partial S^{*2}} + v_{0q}^2 \alpha_{0q}^{(1)} = -2k^2 d_q \beta_{11}^{(0)}$$

Compte tenu des conditions aux limites les solutions des équations 3.2.4 s'écrivent :

$$(3.2.5) \quad \alpha_{0q}^{(1)}(s^*) = - \frac{\nu_{0q}^2 + \delta_{11}^2}{2(\nu_{0q}^2 - \delta_{11}^2)} d_q b_0 \left[\left(1 + \frac{\delta_{11}}{\nu_{0q}}\right) e^{-j\nu_{0q}s^*} + \left(1 - \frac{\delta_{11}}{\nu_{0q}}\right) e^{-j\delta_{11}s_1^*} e^{j\nu_{0q}(s^* - s_1^*)} - 2e^{-j\delta_{11}s^*} \right]$$

$$\alpha_{0q}^{(1)}(s^*) = \frac{k^2}{\nu_{0q}^2 - \delta_{11}^2} d_q \beta_0 \left[\left(1 + \frac{\delta_{11}}{\nu_{0q}}\right) e^{-j\nu_{0q}s^*} + \left(1 - \frac{\delta_{11}}{\nu_{0q}}\right) e^{-j\delta_{11}s_1^*} e^{j\nu_{0q}(s^* - s_1^*)} - 2e^{-j\delta_{11}s^*} \right]$$

3.2.1 Approximation d'ordre (2)

Pour l'approximation d'ordre (2) on trouve le système :

$$\frac{\partial \alpha_{11}^{(2)}}{\partial s^*} + j \frac{\nu_{11}^2}{\omega \epsilon} \alpha_{11}^{(2)} = \sum_q \alpha_{0q}^{(1)} A_{0q}^{01} + \sum_q \alpha_{2q}^{(1)} A_{2q}^{11} + \sum_q \beta_{2q}^{(1)} A_{2q}^{12}$$

$$\frac{\partial \alpha_{11}^{(2)}}{\partial s^*} + j \omega \epsilon \alpha_{11}^{(2)} = \sum_q \alpha_{0q}^{(1)} A_{0q}^{10} + \sum_q \alpha_{2q}^{(1)} A_{2q}^{21} - \sum_q b_{2q}^{(1)} A_{2q}^{12} \quad (3.2.1.1)$$

$$\frac{\partial \beta_{11}^{(2)}}{\partial s^*} - j \frac{\delta_{11}^2}{\omega \mu} \beta_{11}^{(2)} = j \frac{\delta_{11}^2}{\omega \mu} E_2' \beta_{11}^{(2)} - \sum_q \alpha_{0q}^{(1)} D_{0q}^{01} + \sum_q b_{2q}^{(1)} B_{2q}^{11} - \sum_q \alpha_{2q}^{(1)} B_{2q}^{12}$$

$$\frac{\partial \beta_{11}^{(2)}}{\partial s^*} - j \omega \mu \beta_{11}^{(2)} = j \omega \mu E_2' \beta_{11}^{(2)} + \sum_q \alpha_{0q}^{(1)} D_{0q}^{10} + \sum_q \beta_{2q}^{(1)} B_{2q}^{21} + \sum_q \alpha_{2q}^{(1)} B_{2q}^{22}$$

A partir des deux dernières équations du système on peut tirer les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \beta''^{(c2)}}{\partial s^2} + \gamma''^2 \beta''^{(c2)} &= -2\gamma''^2 \epsilon_2 \beta''^{(c1)} + \sum \frac{1}{\gamma} \left\{ -\left(\frac{\partial \alpha_{0q}}{\partial s^2} D_{0q} - j \frac{\delta''}{\omega \gamma} \alpha_{0q} D_{0q} \right) + \left(\frac{\partial \beta_{2q}}{\partial s^2} B_{2q} + j \frac{\delta''}{\omega \gamma} \beta_{2q} B_{2q} \right) - \left(\frac{\partial \alpha_{2q}}{\partial s^2} \alpha_{2q} - j \frac{\delta''}{\omega \gamma} \alpha_{2q} \alpha_{2q} \right) \right\} \\ \frac{\partial b''^{(c2)}}{\partial s^2} + \gamma''^2 b''^{(c2)} &= -2\gamma''^2 \epsilon_2 b''^{(c1)} + \sum \frac{1}{\gamma} \left\{ -\left(j \omega \gamma \alpha_{0q} D_{0q} - \frac{\partial \alpha_{0q}}{\partial s^2} D_{0q} \right) + \left(j \omega \gamma \beta_{2q} B_{2q} + \frac{\partial \beta_{2q}}{\partial s^2} B_{2q} \right) - \left(j \omega \gamma \alpha_{2q} \alpha_{2q} - \frac{\partial \alpha_{2q}}{\partial s^2} \alpha_{2q} \right) \right\} \end{aligned} \quad (3.2.1.2)$$

En remplaçant les relations (3.1.1), (3.2.1) dans les équations 3.2.1.2 et en éliminant les termes séculaires on obtient l'expression de ϵ_2 et ensuite les solutions des deux équations précédentes à l'entrée et à la sortie du coudé

$$\epsilon_2' = \frac{1}{\delta''^2 \nu''^2} \sum \frac{1}{\gamma} \left\{ \frac{u_{2q}^2 k^2 d_q^2}{\nu_{0q} - \delta''^2} (\nu_{0q}^2 + 3\gamma''^2) + \frac{u_{2q}^2 g_q^2}{2(\gamma_{2q}^2 - \delta''^2)} \left(\frac{p_q}{g_q} + 2 \frac{p_q}{g_q} \gamma''^2 + \delta''^2 \gamma_{2q}^2 \right) - \frac{u_{2q}^2 k^2 F_q^2}{2(\nu_{2q}^2 - \delta''^2)} (\nu_{2q}^2 + 3\gamma''^2) \right\}$$

$$\begin{aligned} \beta''^{(c2)}(0) &= \frac{\beta_0}{2\nu''^2 \delta''^2} \sum \frac{1}{\gamma} \left\{ \frac{2 u_{0q}^2 k^2 d_q^2 (\nu_{0q}^2 + \delta''^2)}{\nu_{0q} (\nu_{0q}^2 - \delta''^2)} \left[2 e^{-j(\delta'' + \nu_{0q}) s_1} - e^{-2j\delta'' s_1} - 1 \right] + \frac{u_{0q}^2 (p_q + \delta''^2 g_q) (p_q + \gamma_{2q}^2 g_q)}{2\gamma_{2q} (\gamma_{2q}^2 - \delta''^2)} \left[2 e^{-j(\delta'' + \gamma_{2q}) s_1} - e^{-2j\delta'' s_1} - 1 \right] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{u_{2q}^2 k^2 F_q^2 (\nu_{2q}^2 + \delta''^2)}{\nu_{2q} (\nu_{2q}^2 - \delta''^2)} \left[2 e^{-j(\delta'' + \nu_{2q}) s_1} - e^{-2j\delta'' s_1} - 1 \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.2.1.2)$$

$$\begin{aligned} \beta''^{(c2)}(s_1) &= \frac{\beta_0}{2\nu''^2 \delta''^2} \sum \frac{1}{\gamma} \left\{ \frac{2 u_{0q}^2 k^2 d_q^2 (\nu_{0q}^2 + \delta''^2)}{(\nu_{0q} - \delta''^2)^2} \nu_{0q} \left[\left(1 + \frac{\delta''}{\nu_{0q}} \right)^2 e^{j(\delta'' - \nu_{0q}) s_1} - 1 \right] + \left(1 - \frac{\delta''}{\nu_{0q}} \right)^2 \left(e^{-j(\delta'' + \nu_{0q}) s_1} - 1 \right) \right] + \\ &\quad + \frac{u_{2q}^2 (p_q + \delta''^2 g_q) (p_q + \gamma_{2q}^2 g_q)}{2(\gamma_{2q}^2 - \delta''^2)^2} \gamma_{2q} \left[\left(1 + \frac{\delta''}{\gamma_{2q}} \right)^2 \left(e^{j(\delta'' - \gamma_{2q}) s_1} - 1 \right) + \left(1 - \frac{\delta''}{\gamma_{2q}} \right)^2 \left(e^{-j(\delta'' + \gamma_{2q}) s_1} - 1 \right) \right] - \\ &\quad - \frac{u_{2q}^2 k^2 F_q^2 (\nu_{2q}^2 + \delta''^2)}{(\nu_{2q}^2 - \delta''^2)^2} \nu_{2q} \left[\left(1 + \frac{\delta''}{\nu_{2q}} \right)^2 \left(e^{j(\delta'' - \nu_{2q}) s_1} - 1 \right) + \left(1 - \frac{\delta''}{\nu_{2q}} \right)^2 \left(e^{-j(\delta'' + \nu_{2q}) s_1} - 1 \right) \right] \right\} e^{-j\delta'' s_1} \end{aligned}$$

$$b''^{(c2)}(0) = -\frac{Zk}{\delta''} \beta''^{(c2)}(0) \quad b''^{(c2)}(s_1) = -\frac{Zk}{\delta''} \beta''^{(c2)}(s_1)$$

Dans la résolution des équations 3.212 on a tenu compte des conditions à l'entrée et à la sortie du coude. Les résultats donnés par 3.212 permettent de déterminer les coefficients de réflexion et de transmission du coude. Dans ces expressions γ'' , γ''_{2q} , ν''_{0q} , ν''_{2q} sont les constantes de propagation perturbées

$$\gamma'' = \frac{\gamma''_{11}}{1 + \frac{1}{R^2} E_2'} \quad \text{mode TE}_{11}$$

$$\gamma''_{2q} = \frac{\gamma_{2q}}{1 + \frac{1}{R^2} E_2'} \quad \text{mode TE}_{2q}$$

$$\nu''_{0q} = \frac{\nu_{0q}}{1 + \frac{1}{R^2} E_2'} \quad \text{mode TM}_{0q}$$

$$\nu''_{2q} = \frac{\nu_{2q}}{1 + \frac{1}{R^2} E_2'} \quad \text{mode TM}_{2q}$$

Conclusion.

L'étude théorique de la propagation le long d'un coude a porté sur des ondes ayant un vecteur électrique parallèle ou perpendiculaire au plan de symétrie du coude. A l'intérieur du coude les constantes de propagation suivant ces deux directions, sont légèrement différentes, ainsi que les atténuations. Dans le cas d'une onde dont le vecteur électrique a une orientation quelconque à l'entrée, la différence entre les constantes de propagation et l'atténuation suivant les deux directions principales de polarisation, entraîne l'apparition d'une onde faiblement polarisée elliptiquement et la rotation du vecteur électrique à la sortie.

L'utilisation de la méthode de perturbation, nous a permis de déterminer les expressions analytiques des coefficients du développement en modes propres, du champ électromagnétique à l'intérieur du guide courbé et par suite d'en déduire le champ électromagnétique du mode TE_{11} dans les deux cas de polarisation.

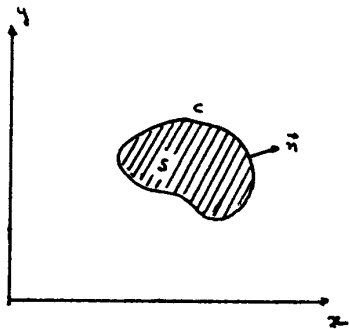
Nous allons maintenant entreprendre une étude numérique systématique des pertes additionnelles, créées par un coude du guide circulaire propageant le mode TE_{11} et de calculer la rotation du vecteur électrique en fonction des paramètres géométriques du guide courbé.

ANNEXE A

Définition et propriétés des fonctions propres et des vecteurs propres.

Application au guide circulaire de rayon a

On s'intéresse aux fonctions de deux variables (x, y) ou (r, θ) définies dans un domaine S limité par un contour fermé C et qui vérifient l'équation :



$$\nabla_t^2 \varphi + k^2 \varphi = 0$$

Définition et propriétés des fonctions propres

Fonctions propres de type Dirichlet $\varphi_{mp}(r, \theta)$

L'équation $\nabla_t^2 \varphi + k^2 \varphi = 0$ avec $\varphi = 0$ sur C , n'a de solutions que pour certaines valeurs k_{mp} de k appelées valeurs propres. Les solutions correspondantes φ_{mp} sont appelées fonctions propres de type Dirichlet. m et p sont des nombres entiers permettant de classer ces fonctions propres.

Les fonctions propres de type Dirichlet vérifient :

$$\nabla_t^2 \varphi_{mp} + k_{mp}^2 \varphi_{mp} = 0 \text{ avec } \varphi_{mp} = 0 \text{ sur } C$$

Fonctions propres de type Neumann $\psi_{mp}(r, \theta)$

L'équation $\nabla_t^2 \psi + l^2 \psi = 0$ avec $\partial \psi / \partial n = 0$ sur C (\vec{n} normale à C dans le plan de S et dirigée vers l'extérieur de S), n'a de solutions que

pour certaines valeurs l_{mp} de l appelées valeurs propres. Les solutions correspondantes ψ_{mp} sont appelées fonctions propres de type Neumann.

Les fonctions propres de type Neumann vérifient :

$$\nabla_t^2 \psi_{mp} + l_{mp}^2 \psi_{mp} = 0 \text{ avec } \partial \psi / \partial n = 0 \text{ sur } c$$

Orthogonalité des fonctions propres

En l'absence de dégénérescence ($i \neq j$) on a les relations suivantes :

$$\int_s \varphi_i \varphi_j ds = \int_s \psi_i \psi_j ds = \delta_{ij}$$

$$\int_s (\text{grad}_t \varphi_i \cdot \text{grad}_t \varphi_j) ds = \int_s (\vec{u}_z \wedge \text{grad}_t \varphi_i) \cdot (\vec{u}_z \wedge \text{grad}_t \varphi_j) ds = k_j^2 \delta_{ij}$$

$$\int_s (\text{grad}_t \psi_i \cdot \text{grad}_t \psi_j) ds = \int_s (\vec{u}_z \wedge \text{grad}_t \psi_i) \cdot (\vec{u}_z \wedge \text{grad}_t \psi_j) ds = l_j^2 \delta_{ij}$$

$$\int_s \text{grad}_t \varphi_i \cdot (\vec{u}_z \wedge \text{grad}_t \psi_j) ds = \int_s \text{grad}_t \psi_i \cdot (\vec{u}_z \wedge \text{grad}_t \varphi_j) ds = 0$$

Développement d'une fonction scalaire F quelconque

On peut montrer que les fonctions φ_{mp} , ψ_{mp} constituent deux ensembles complets de fonctions orthogonales permettant de développer une fonction F quelconque définie dans s, même si F ne vérifie pas les conditions aux limites imposées aux fonctions propres. Les propriétés d'orthogonalité permettent de déterminer facilement les coefficients des développements :

$$F = \sum_m \sum_p \alpha_{mp} \varphi_{mp} \quad \text{avec } \alpha_{mp} = \int_s F \varphi_{mp} ds$$

$$F = \sum_m \sum_p \beta_{mp} \psi_{mp} \quad \text{avec } \beta_{mp} = \int_s F \psi_{mp} ds$$

Les fonctions propres φ_{mp} et ψ_{mp} sont fonctions des coordonnées transversales (x, y ou r, θ). Par conséquent, si F dépend des coordonnées transversales et de z , les coefficients a_{mp} et b_{mp} seront fonctions de z

Définition et propriétés des vecteurs propres

A partir des fonctions φ_{mp} et ψ_{mp} il est possible de construire deux ensembles complets de vecteurs propres permettant le développement d'un vecteur \vec{A} quelconque du plan transversal.

Vecteurs propres de type "électrique"

ce sont les solutions de $\nabla_t^2 \vec{a} + \lambda^2 \vec{a} = 0$ avec $\vec{n} \wedge \vec{a} = 0$ sur c

On distingue parmi ces solutions

1. Les vecteurs propres "électriques irrotationnelles" $\text{grad}_t \varphi_{mp}$
2. Les vecteurs propres "électriques solénoïdaux" $\vec{u}_z \wedge \text{grad}_t \psi_{mp}$

Le développement d'un vecteur transversal \vec{A} s'écrit :

$$\vec{A} = \sum_m \sum_p a_{mp} \text{grad}_t \varphi_{mp} + \sum_m \sum_p b_{mp} (\vec{u}_z \wedge \text{grad}_t \psi_{mp})$$

Vecteurs propres de type "magnétique"

ce sont les solutions de $\nabla_t^2 \vec{a} + \gamma^2 \vec{a} = 0$ avec $\vec{n} \cdot \vec{a} = 0$ sur c

On distingue parmi ces solutions

1. Les vecteurs propres "magnétiques irrotationnelles" $\text{grad}_t \psi_{mp}$
2. Les vecteurs propres "magnétiques solénoïdaux" $\vec{u}_z \wedge \text{grad}_t \varphi_{mp}$

Le développement d'un vecteur transversal s'écrit :

$$\vec{A} = \sum_m \sum_p \alpha_{mp} (\vec{u}_z \wedge \text{grad}_t \varphi_{mp}) + \sum_m \sum_p \beta_{mp} \text{grad}_t \psi_{mp}$$

calcul des coefficients du développement

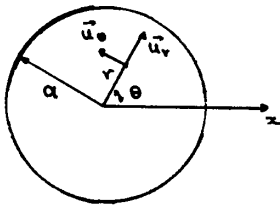
Les coefficients se calculent à l'aide des relations d'orthogonalité entre gradients :

$$a_{mp} = \frac{1}{k_{mp}^2} \int_S \vec{A} \cdot \text{grad}_t \varphi_{mp} ds, \quad b_{mp} = \frac{1}{l_{mp}^2} \int_S \vec{A} \cdot (\vec{u}_z \wedge \text{grad}_t \varphi_{mp}) ds$$

$$d_{mp} = \frac{1}{k_{mp}^2} \int_S \vec{A} \cdot (\vec{u}_z \wedge \text{grad}_t \varphi_{mp}) ds, \quad \beta_{mp} = \frac{1}{l_{mp}^2} \int_S \vec{A} \cdot \text{grad}_t \varphi_{mp} ds$$

Les développements s'appliquent à un vecteur \vec{A} transversal. Si \vec{A}_t ne dépend que de x et y , les coefficients $a_{mp}, b_{mp}, d_{mp}, \beta_{mp}$ sont des constantes. Si \vec{A}_t dépend de x, y, z , les coefficients dépendent de z .

Application au cercle de rayon a



Les fonctions propres sont calculées par la méthode de séparation des variables. Les vecteurs propres électriques et magnétiques se déduisent des fonctions propres.

$$k_{mp} = \frac{u_{mp}}{a} \quad m = 0, 1, 2, \dots, p = 1, 2, 3, \dots \quad u_{mp} \text{ pième racine de } J_m$$

$$\varphi_{mp} = \frac{(\epsilon_m/\eta)^{1/2}}{a J_{m+1}(u_{mp})} J_m(u_{mp} \frac{\rho}{a}) \begin{Bmatrix} \sin m\theta \\ \cos m\theta \end{Bmatrix}, \quad \epsilon_m = \begin{cases} 1 & \text{pour } m = 0 \\ 2 & \text{pour } m \neq 0 \end{cases}$$

$$\text{grad}_t \varphi_{mp} = \frac{(\epsilon_m/\eta)^{1/2}}{a J_{m+1}(u_{mp})} \left[\frac{u_{mp}}{a} J'_m(u_{mp} \frac{\rho}{a}) \begin{Bmatrix} \sin m\theta \\ \cos m\theta \end{Bmatrix} \vec{u}_\rho + \frac{m}{\rho} J_m(u_{mp} \frac{\rho}{a}) \begin{Bmatrix} \cos m\theta \\ -\sin m\theta \end{Bmatrix} \vec{u}_\theta \right]$$

$$\vec{u}_z \wedge \text{grad}_t \varphi_{mp} = \frac{(\epsilon_m/\eta)^{1/2}}{a J_{m+1}(u_{mp})} \left[-\frac{m}{\rho} J_m(u_{mp} \frac{\rho}{a}) \begin{Bmatrix} \cos m\theta \\ -\sin m\theta \end{Bmatrix} \vec{u}_\rho + \frac{u_{mp}}{a} J'_m(u_{mp} \frac{\rho}{a}) \begin{Bmatrix} \sin m\theta \\ \cos m\theta \end{Bmatrix} \vec{u}_\theta \right]$$

$$l_{mp} = \frac{v_{mp}}{a} \quad m = 0, 1, 2, \dots, p = 1, 2, 3, \dots \quad v_{mp} \text{ pième racine de } J'_m$$

$$\text{grad}_t \psi_{mp} = \frac{v_{mp} (\epsilon_m/\eta)^{1/2}}{a \sqrt{v_{mp}^2 - m^2} J_m(v_{mp})} \left[\frac{v_{mp}}{a} J'_m(v_{mp} \frac{\rho}{a}) \begin{Bmatrix} \sin m\theta \\ \cos m\theta \end{Bmatrix} \vec{u}_\rho + \frac{m}{\rho} J_m(v_{mp} \frac{\rho}{a}) \begin{Bmatrix} \cos m\theta \\ -\sin m\theta \end{Bmatrix} \vec{u}_\theta \right]$$

$$\vec{u}_z \wedge \text{grad}_t \psi_{mp} = \frac{v_{mp} (\epsilon_m/\eta)^{1/2}}{a \sqrt{v_{mp}^2 - m^2} J_m(v_{mp})} \left[-\frac{m}{\rho} J_m(v_{mp} \frac{\rho}{a}) \begin{Bmatrix} \cos m\theta \\ -\sin m\theta \end{Bmatrix} \vec{u}_\rho + \frac{v_{mp}}{a} J'_m(v_{mp} \frac{\rho}{a}) \begin{Bmatrix} \sin m\theta \\ \cos m\theta \end{Bmatrix} \vec{u}_\theta \right]$$

$$\psi_{mp} = \frac{v_{mp} (\epsilon_m/\eta)^{1/2}}{a \sqrt{v_{mp}^2 - m^2} J_m(v_{mp})} J_m(v_{mp} \frac{\rho}{a}) \begin{Bmatrix} \sin m\theta \\ \cos m\theta \end{Bmatrix}$$

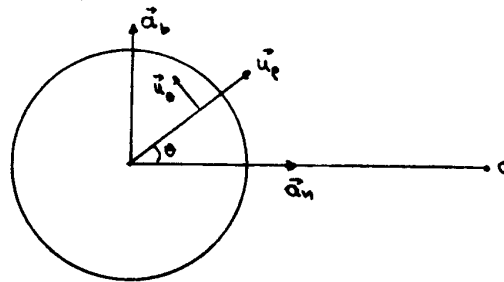
ANNEXE B

Relations entre coordonnées toroidales

et coordonnées cylindriques.

Etablissement des équations du guide courbé.

Soit $\vec{a}_n, \vec{a}_b, \vec{a}_t$: le vecteur tangentiel unitaire, le vecteur normal unitaire et le vecteur binormal unitaire respectivement du système de coordonnées toroidales et $\vec{u}_p, \vec{u}_\theta, \vec{u}_s$ les vecteurs unitaires du système de coordonnées cylindrique



entre les vecteurs unitaires du système toroidal il existe les relations :

$$\frac{d\vec{a}_t}{ds} = \frac{1}{R} \vec{a}_n, \quad \frac{d\vec{a}_n}{ds} = -\frac{1}{R} \vec{a}_t, \quad \frac{d\vec{a}_b}{ds} = 0 \quad (1.1)$$

On peut passer par le système cylindrique au système toroidal à l'aide des équations suivantes

$$\vec{u}_p = \vec{a}_n \cos \theta + \vec{a}_b \sin \theta \quad (1.2)$$

$$\vec{u}_\theta = -\vec{a}_n \sin \theta + \vec{a}_b \cos \theta$$

En dérivant les équations 1.2 on obtient :

$$\frac{d\vec{u}_p}{ds} = -\frac{\vec{a}_t}{R} \cos \theta$$

$$\frac{d\vec{u}_\theta}{ds} = \frac{\vec{a}_t}{R} \sin \theta \quad (1.3)$$

$$\frac{d\vec{u}_s}{ds} = \frac{\vec{a}_n}{R}$$

A partir des équations qu'on a trouvé précédemment on peut calculer la dérivée partielle du vecteur propre $\text{grad}_t \varphi_{mp}$. Cette expression va nous servir par la suite

Le vecteur propre $\text{grad}_t \varphi_{mp}$ dans le système de coordonnées cylindriques s'exprime par la relation suivante :

$$\text{grad}_t \varphi_{mp} = \frac{\partial \varphi_{mp}}{\partial \rho} \vec{u}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \varphi_{mp}}{\partial \theta} \vec{u}_\theta \quad (1.4)$$

On dérive cette équation par rapport à s . Donc on a :

$$\frac{\partial}{\partial s} \text{grad}_t \varphi_{mp} = \frac{\partial \varphi_{mp}}{\partial \rho} \frac{\partial \vec{u}_\rho}{\partial s} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \varphi_{mp}}{\partial \theta} \frac{\partial \vec{u}_\theta}{\partial s} \quad (1.5)$$

A l'aide des expressions 1.3 on trouve :

$$\frac{\partial}{\partial s} \text{grad}_t \varphi_{mp} = \frac{\vec{a}_t}{R} \left(-\frac{\partial \varphi_{mp}}{\partial \rho} \cos \theta + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \varphi_{mp}}{\partial \theta} \sin \theta \right) \quad (1.6)$$

qui implique la relation suivante :

$$\frac{\partial}{\partial s} \text{grad}_t \varphi_{mp} = \frac{\vec{a}_t}{R} \left(\frac{\partial \varphi_{mp}}{\partial \rho} \vec{u}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \varphi_{mp}}{\partial \theta} \vec{u}_\theta \right) \cdot (-\vec{u}_\rho \cos \theta + \vec{u}_\theta \sin \theta) \quad (1.7)$$

La combinaison de 1.2 nous donne :

$$-\vec{u}_\rho \cos \theta + \vec{u}_\theta \sin \theta = -\vec{a}_n \quad (1.8)$$

En remplaçant les relations 1.4, 1.8 dans 1.7 on trouve :

$$\frac{\partial}{\partial s} \text{grad}_t \varphi_{mp} = -\frac{1}{R} \left[\vec{a}_t (\text{grad}_t \varphi_{mp} \cdot \vec{a}_n) \right] \quad (1.9)$$

mais on a aussi la relation :

$$\text{grad}_t \varphi_{mp} \wedge (\vec{a}_t \wedge \vec{a}_n) = \vec{a}_t (\text{grad}_t \varphi_{mp} \cdot \vec{a}_n) - (\text{grad}_t \varphi_{mp} \cdot \vec{a}_t) \vec{a}_n$$

qui implique la relation suivante :

$$\text{grad}_t \varphi_{mp} \wedge \vec{a}_b = \vec{a}_t (\text{grad}_t \varphi_{mp} \cdot \vec{a}_n)$$

Donc la relation 1.9 devient :

$$\frac{\partial}{\partial s} \text{grad}_t \varphi_{mp} = \frac{1}{R} (\vec{a}_b \wedge \text{grad}_t \varphi_{mp}) \quad (1.10)$$

On a une relation similaire pour le vecteur $\text{grad}_t \psi_{mp}$:

$$\frac{\partial}{\partial s} \text{grad}_t \psi_{mp} = \frac{1}{R} (\vec{a}_b \wedge \text{grad}_t \psi_{mp}) \quad (1.11)$$

2. Etablissement des équations du guide courbé

Partons de l'équation de Maxwell :

$$\text{rot } \vec{E} = -j\omega\gamma \vec{H} \quad (2.1)$$

multiplions par $\vec{u}_s \Psi_{mp}$ et intégrons sur la surface s de la section droite du guide. On tient toujours compte des expressions des coefficients des développements en fonctions propres et en vecteurs propres qui apparaissent dans l'annexe A.

$$\int_s \Psi_{mp} \vec{u}_s \cdot \text{rot } \vec{E} \, ds = -j\omega\gamma \int_s \vec{H} \cdot \vec{u}_s \Psi_{mp} \, ds = -j\omega\gamma \gamma_{mp} \quad (2.2)$$

A l'aide de l'identité :

$$\text{rot}(\Psi_{mp} \vec{E}) = \Psi_{mp} \text{rot } \vec{E} + \text{grad}_t \Psi_{mp} \wedge \vec{E} \quad (2.3)$$

l'équation 2.2 devient :

$$\int_s \text{rot}(\Psi_{mp} \vec{E}) \cdot \vec{u}_s \, ds - \int_s (\text{grad}_t \Psi_{mp} \wedge \vec{E}) \cdot \vec{u}_s \, ds = -j\omega\gamma \gamma_{mp} \quad (2.4)$$

D'après le théorème de Stokes qui s'applique au vecteur $(\Psi_{mp} \vec{E})$

on a :

$$\int_c \Psi_{mp} \vec{E} \cdot \vec{t} \, dc - \int_s \vec{E} \cdot (\vec{u}_s \wedge \text{grad}_t \Psi_{mp}) \, ds = -j\omega\gamma \gamma_{mp} \quad (2.5)$$

Pour un guide métallique parfait l'intégrale $\int_c \Psi_{mp} \vec{E} \cdot \vec{t} \, dc$ est nulle et l'équation 2.5 s'écrit :

$$b_{mp} - j \frac{\omega\gamma}{\ell_{mp}^2} \gamma_{mp} = 0 \quad (2.6)$$

Partons de l'équation de Maxwell :

$$\text{grad}_t (h_s E_s) \wedge \vec{u}_s + \vec{u}_s \wedge \frac{\partial \vec{E}_t}{\partial s} = -j\omega\gamma \vec{H}_t \quad (2.7)$$

qui est la projection de l'équation 2.1 dans le plan transversal.

Multiplions 2.7 par $\text{grad}_t \Psi_{mp}$ et intégrons sur la surface s :

$\int_S [\text{grad}_t(h_s E_s) \wedge \vec{u}_s] \cdot \text{grad}_t \psi_{mp} ds + \int_S (\vec{u}_s \wedge \frac{\partial \vec{E}_t}{\partial s}) \cdot \text{grad}_t \psi_{mp} ds = -j\omega\gamma \int_S h_s \vec{H}_t \cdot \text{grad}_t \psi_{mp} ds$
 qui implique grâce à l'identité $(\vec{A} \cdot \vec{B} \wedge \vec{C} = \vec{B} \cdot \vec{C} \wedge \vec{A} = \vec{C} \cdot \vec{A} \wedge \vec{B})$ l'équation suivante:

$\int_S [\text{grad}_t \psi_{mp} \wedge \text{grad}_t(h_s E_s)] \cdot \vec{u}_s ds - \int_S \frac{\partial \vec{E}_t}{\partial s} \cdot (\vec{u}_s \wedge \text{grad}_t \psi_{mp}) ds = -j\omega\gamma \int_S h_s \vec{H}_t \cdot \text{grad}_t \psi_{mp} ds$
 A l'aide de la relation 2.3 et de l'identité $(\text{rot grad } \vec{A} = 0)$, l'équation précédente devient :

$\int_S \text{rot}[h_s E_s \text{grad}_t \psi_{mp}] \cdot \vec{u}_s ds - \int_S \frac{\partial \vec{E}_t}{\partial s} \cdot (\vec{u}_s \wedge \text{grad}_t \psi_{mp}) ds = -j\omega\gamma \int_S h_s \vec{H}_t \cdot \text{grad}_t \psi_{mp} ds$
 En appliquant le théorème de Stokes au vecteur $(h_s E_s \text{grad}_t \psi_{mp})$ on a la relation suivante :

$\int_C h_s E_s \text{grad}_t \psi_{mp} \cdot \vec{t} dc - \int_S \frac{\partial \vec{E}_t}{\partial s} \cdot (\vec{u}_s \wedge \text{grad}_t \psi_{mp}) ds = -j\omega\gamma \int_S h_s \vec{H}_t \cdot \text{grad}_t \psi_{mp} ds$
 pour un guide métallique parfait l'intégrale $\int_C h_s E_s \text{grad}_t \psi_{mp} \cdot \vec{t} dc$ est nulle.

D'où :

$$\int_S \frac{\partial \vec{E}_t}{\partial s} \cdot (\vec{u}_s \wedge \text{grad}_t \psi_{mp}) ds = j\omega\gamma \int_S (1 - \frac{\rho}{R} \cos\theta) \vec{H}_t \cdot \text{grad}_t \psi_{mp} ds \quad (2.8)$$

On développe le champ électrique transversal en vecteurs propres et on dérive par rapport à s :

$$\frac{\partial \vec{E}_t}{\partial s} = \sum_m \sum_p \frac{\partial a_{mp}}{\partial s} \text{grad}_t \psi_{mp} + \sum_m \sum_p a_{mp} \frac{\partial}{\partial s} (\text{grad}_t \psi_{mp}) + \sum_m \sum_p \frac{\partial b_{mp}}{\partial s} (\vec{u}_s \wedge \text{grad}_t \psi_{mp}) + \sum_m \sum_p b_{mp} \left[\frac{\partial \vec{u}_s}{\partial s} \wedge \text{grad}_t \psi_{mp} + \vec{u}_s \wedge \frac{\partial}{\partial s} (\text{grad}_t \psi_{mp}) \right] \quad (2.9)$$

En remplaçant dans cette équation les relations 1.10, 1.11 on trouve

$$\frac{\partial \vec{E}_t}{\partial s} = \sum_m \sum_p \frac{\partial a_{mp}}{\partial s} \text{grad}_t \psi_{mp} + \frac{1}{R} \sum_m \sum_p a_{mp} \vec{a}_s \wedge \text{grad}_t \psi_{mp} + \sum_m \sum_p \frac{\partial b_{mp}}{\partial s} (\vec{u}_s \wedge \text{grad}_t \psi_{mp}) + \frac{1}{R} \sum_m \sum_p b_{mp} (\vec{a}_s \wedge \text{grad}_t \psi_{mp})$$

En multipliant l'équation précédente par $(\vec{u}_s \wedge \text{grad}_t \psi_{mp})$, en intégrant sur la surface S et en tenant compte des propriétés d'ortho-

gonalité des vecteurs propres on déduit

$$\int_S \frac{\partial \vec{E}_t}{\partial s} \cdot (\vec{u}_s \wedge \text{grad}_t \varphi_{mp}) ds = \frac{\partial b_{mp}}{\partial s} \ell_{mp}^2 \quad (2.10)$$

A partir des équations 2.8, 2.10 on trouve :

$$\frac{\partial b_{mp}}{\partial s} \ell_{mp}^2 = j\omega \int_S \vec{H}_t \cdot \text{grad}_t \varphi_{mp} ds - j\omega \int_S \frac{\rho}{R} \cos \theta \vec{H}_t \cdot \text{grad}_t \varphi_{mp} ds$$

qui implique l'équation suivante :

$$\frac{\partial b_{mp}}{\partial s} - j\omega \beta_{mp} = -\frac{j\omega}{\ell_{mp}^2} \int_S \frac{\rho}{R} \cos \theta \vec{H}_t \cdot \text{grad}_t \varphi_{mp} ds \quad (2.11)$$

On multiplie l'équation 2.7 par $\vec{u}_s \wedge \text{grad}_t \varphi_{mp}$ et on intègre sur s :

$$\begin{aligned} \int_S (\text{grad}_t h_s E_s \wedge \vec{u}_s) \cdot (\vec{u}_s \wedge \text{grad}_t \varphi_{mp}) ds + \int_S (\vec{u}_s \wedge \frac{\partial \vec{E}_t}{\partial s}) \cdot (\vec{u}_s \wedge \text{grad}_t \varphi_{mp}) ds = \\ = -j\omega \int_S h_s \vec{H}_t \cdot (\vec{u}_s \wedge \text{grad}_t \varphi_{mp}) ds \end{aligned}$$

A l'aide de l'identité : $(\vec{A} \wedge \vec{B}) \cdot (\vec{C} \wedge \vec{D}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})(\vec{B} \cdot \vec{D}) - (\vec{A} \cdot \vec{D})(\vec{B} \cdot \vec{C})$ on trouve :

$$-\int_S (\text{grad}_t \varphi_{mp} \cdot \text{grad}_t h_s E_s) ds + \int_S \frac{\partial \vec{E}_t}{\partial s} \cdot \text{grad}_t \varphi_{mp} ds = -j\omega \int_S h_s \vec{H}_t \cdot (\vec{u}_s \wedge \text{grad}_t \varphi_{mp}) ds$$

compte tenu de l'identité de Green :

$$\int_S (h_s E_s \text{div grad}_t \varphi_{mp} + \text{grad}_t (h_s E_s) \cdot \text{grad}_t \varphi_{mp}) ds = \int_C E_s h_s \frac{\partial \varphi_{mp}}{\partial n} dc =$$

$$\int_C h_s E_s \vec{n} \cdot \text{grad}_t \varphi_{mp} dc = \int_C h_s (\vec{n} \wedge \vec{E}) \cdot (\vec{u}_s \wedge \text{grad}_t \varphi_{mp}) dc = 0,$$

l'équation s'écrit :

$$\int_S h_s E_s \text{div grad}_t \varphi_{mp} ds + \int_S \frac{\partial \vec{E}_t}{\partial s} \cdot \text{grad}_t \varphi_{mp} ds = -j\omega \int_S h_s \vec{H}_t \cdot (\vec{u}_s \wedge \text{grad}_t \varphi_{mp}) ds \quad (2.12)$$

mais la fonction propre φ_{mp} vérifie l'équation suivante :

$$\text{div grad}_t \varphi_{mp} + k_{mp}^2 \varphi_{mp} = 0 \text{ avec } \varphi_{mp} = 0 \text{ sur } C$$

En reportant cette expression dans l'équation 2.12 on trouve :

$$-k_{mp}^2 \int_S h_s E_s \varphi_{mp} ds + \int_S \frac{\partial \vec{E}_t}{\partial s} \cdot \text{grad}_t \varphi_{mp} ds = -j\omega \int_S h_s \vec{H}_t \cdot (\vec{u}_s \wedge \text{grad}_t \varphi_{mp}) ds \quad (2.13)$$

en multipliant l'équation 2.9 par $\text{grad}_t \varphi_{mp}$, en intégrant sur la surface

s et en tenant compte des propriétés d'orthogonalité on déduit

$$\int_S \frac{\partial \vec{E}_t}{\partial s} \cdot \text{grad}_t \varphi_{mp} ds = \frac{\partial a_{mp}}{\partial s} k_{mp}^2 \quad (2.14)$$

Par suite l'équation 2.13 se simplifie :

$$-k_{mp}^2 \int_s h_s E_s \varphi_{mp} ds + \frac{\partial \alpha_{mp}}{\partial s} k_{mp}^2 = -j\omega\gamma \int_s h_s \vec{H}_t \cdot (\vec{u}_s \wedge \text{grad}_t \varphi_{mp}) ds$$

d'où :

$$\frac{\partial \alpha_{mp}}{\partial s} + j\omega\gamma \alpha_{mp} - C_{mp} = \frac{j\omega\gamma}{k_{mp}^2} \int_s \frac{P}{R} \cos\theta \vec{H}_t \cdot (\vec{u}_s \wedge \text{grad}_t \varphi_{mp}) ds - \int_s \frac{P}{R} \cos\theta E_s \varphi_{mp} ds \quad (2.15)$$

Partons de l'équation de Maxwell :

$$\text{rot} \vec{H} = j\omega \epsilon \vec{E} \quad (2.16)$$

multiplions par $\vec{u}_s \varphi_{mp}$ et intégrons sur la surface s :

$$\int_s \text{rot} \vec{H} \cdot \vec{u}_s \varphi_{mp} ds = j\omega \epsilon \int_s \vec{E} \cdot \vec{u}_s \varphi_{mp} ds \quad (2.17)$$

compte tenu de la relation suivante :

$$\text{rot}(\varphi_{mp} \vec{H}) = \varphi_{mp} \text{rot} \vec{H} + \text{grad}_t \varphi_{mp} \wedge \vec{H}$$

l'équation 2.17 s'écrit :

$$\int_s \text{rot}(\varphi_{mp} \vec{H}) \cdot \vec{u}_s ds - \int_s \vec{H} \cdot (\vec{u}_s \wedge \text{grad}_t \varphi_{mp}) ds = j\omega \epsilon C_{mp} \quad (2.18)$$

En appliquant le théorème de Stokes au vecteur $\varphi_{mp} \vec{H}$, l'équation 2.18 se

simplifie: $\int_c \varphi_{mp} \vec{H} \cdot \vec{t} dc - \alpha_{mp} k_{mp}^2 = j\omega \epsilon C_{mp}$

L'intégrale du premier membre étant nulle elle s'écrit finalement

$$\alpha_{mp} + \frac{j\omega \epsilon}{k_{mp}^2} C_{mp} = 0 \quad (2.19)$$

Partons de l'équation :

$$\text{grad}_t (h_s H_s) \wedge \vec{u}_s + \vec{u}_s \wedge \frac{\partial \vec{H}_t}{\partial s} = j\omega \epsilon \vec{E}_t \quad (2.20)$$

qui est la projection de l'équation 2.16 dans le plan transversal

Multiplions par $\text{grad}_t \varphi_{mp}$ et intégrons sur la surface s :

$$\int_s (\text{grad}_t h_s H_s \wedge \vec{u}_s) \cdot \text{grad}_t \varphi_{mp} ds + \int_s (\vec{u}_s \wedge \frac{\partial \vec{H}_t}{\partial s}) \cdot \text{grad}_t \varphi_{mp} ds = j\omega \epsilon \int_s h_s \vec{E}_t \cdot \text{grad}_t \varphi_{mp} ds$$

qui implique l'équation suivante:

$$\int_S (\text{grad}_t \varphi_{mp} \wedge \text{grad}_t h_s H_s) \cdot \vec{u}_s ds - \int_S \frac{\partial \vec{H}_t}{\partial s} \cdot (\vec{u}_s \wedge \text{grad}_t \varphi_{mp}) ds = j\omega \epsilon \int_S h_s \vec{E}_t \cdot \text{grad}_t \varphi_{mp} ds \quad (2.21)$$

A l'aide des deux relations suivantes:

$$\begin{aligned} \text{rot}(h_s H_s \text{grad}_t \varphi_{mp}) &= h_s H_s \text{rot grad}_t \varphi_{mp} + \text{grad}_t \varphi_{mp} \cdot \text{grad}_t h_s H_s \\ \text{rot grad}_t \varphi_{mp} &= 0 \end{aligned}$$

l'équation 2.21 s'écrit:

$$\int_S \text{rot}(h_s H_s \text{grad}_t \varphi_{mp}) \cdot \vec{u}_s ds - \int_S \frac{\partial \vec{H}_t}{\partial s} \cdot (\vec{u}_s \wedge \text{grad}_t \varphi_{mp}) ds = j\omega \epsilon \int_S h_s \vec{E}_t \cdot \text{grad}_t \varphi_{mp} ds$$

En appliquant le théorème de Stokes au vecteur $(h_s H_s \text{grad}_t \varphi_{mp})$ on a:

$$\int_C h_s H_s \text{grad}_t \varphi_{mp} \cdot \vec{t} dc - \int_S \frac{\partial \vec{H}_t}{\partial s} \cdot (\vec{u}_s \wedge \text{grad}_t \varphi_{mp}) ds = j\omega \epsilon \int_S h_s \vec{E}_t \cdot \text{grad}_t \varphi_{mp} ds$$

La première intégrale est nulle, donc:

$$- \int_S \frac{\partial \vec{H}_t}{\partial s} \cdot (\vec{u}_s \wedge \text{grad}_t \varphi_{mp}) ds = j\omega \epsilon \int_S h_s \vec{E}_t \cdot \text{grad}_t \varphi_{mp} ds \quad (2.22)$$

On développe le champ magnétique transversal en vecteurs propres et

on le dérive par rapport à s :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{H}_t}{\partial s} &= \sum_m \sum_p \frac{\partial \alpha_{mp}}{\partial s} (\vec{u}_s \wedge \text{grad}_t \varphi_{mp}) + \sum_m \sum_p \alpha_{mp} \left[\frac{\partial \vec{u}_s}{\partial s} \wedge \text{grad}_t \varphi_{mp} + \vec{u}_s \wedge \frac{\partial}{\partial s} (\text{grad}_t \varphi_{mp}) \right] + \\ &+ \sum_m \sum_p \frac{\partial \beta_{mp}}{\partial s} \text{grad}_t \varphi_{mp} + \sum_m \sum_p \beta_{mp} \frac{\partial}{\partial s} \text{grad}_t \varphi_{mp} \end{aligned}$$

En remplaçant dans cette équation les relations 1.10, 1.11 on arrive à:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{H}_t}{\partial s} &= \sum_m \sum_p \frac{\partial \alpha_{mp}}{\partial s} (\vec{u}_s \wedge \text{grad}_t \varphi_{mp}) + \frac{1}{R} \sum_m \sum_p \alpha_{mp} (\vec{a}_m \wedge \text{grad}_t \varphi_{mp}) + \\ &+ \sum_m \sum_p \frac{\partial \beta_{mp}}{\partial s} \text{grad}_t \varphi_{mp} + \sum_m \sum_p \beta_{mp} (\vec{a}_m \wedge \text{grad}_t \varphi_{mp}) \quad (2.23) \end{aligned}$$

En multipliant l'équation précédente par $(\vec{u}_s \wedge \text{grad}_t \varphi_{mp})$, en intégrant sur la surface S et en tenant compte des propriétés d'orthogonalité des vecteurs propres on déduit la relation suivante:

$$\int_S \frac{\partial \vec{H}_t}{\partial s} \cdot (\vec{u}_s \wedge \text{grad}_t \varphi_{mp}) ds = \frac{\partial \alpha_{mp}}{\partial s} k_{mp}^i \quad (2.24)$$

En remplaçant cette intégrale par sa valeur l'équation 2.22 s'écrit:

$$\frac{\partial \alpha_{mp}}{\partial s} + j\omega \epsilon \alpha_{mp} = \frac{j\omega \epsilon}{k_{mp}^i} \int_S \frac{\rho}{R} \cos \theta \vec{E}_t \cdot \text{grad}_t \varphi_{mp} ds \quad (2.25)$$

On multiplie l'équation 2.20 par $\vec{u}_s \wedge \text{grad}_t \Psi_{mp}$ et on intègre sur la surface s

$$\int_s (\text{grad}_t h_s \vec{E}_s \wedge \vec{u}_s) \cdot (\vec{u}_s \wedge \text{grad}_t \Psi_{mp}) ds + \int_s (\vec{u}_s \wedge \frac{\partial \vec{H}_t}{\partial s}) \cdot (\vec{u}_s \wedge \text{grad}_t \Psi_{mp}) ds = \\ = j\omega \epsilon \int_s h_s \vec{E}_t \cdot (\vec{u}_s \wedge \text{grad}_t \Psi_{mp}) ds$$

qui implique l'équation suivante :

$$-\int_s (\text{grad}_t \Psi_{mp} \cdot \text{grad}_t h_s H_s) ds + \int_s \frac{\partial \vec{H}_t}{\partial s} \cdot \text{grad}_t \Psi_{mp} ds = j\omega \epsilon \int_s h_s \vec{E}_t \cdot (\vec{u}_s \wedge \text{grad}_t \Psi_{mp}) ds \quad (2.26)$$

compte tenu de l'identité de Green :

$$\int_s [h_s H_s \text{div grad}_t \Psi_{mp} + \text{grad}_t \Psi_{mp} \cdot \text{grad}_t (h_s H_s)] ds = \int_c H_s h_s \frac{\partial \Psi_{mp}}{\partial n} dc = 0,$$

l'équation 2.26 devient :

$$\int_s h_s H_s \text{div grad}_t \Psi_{mp} ds + \int_s \frac{\partial \vec{H}_t}{\partial s} \cdot \text{grad}_t \Psi_{mp} ds = j\omega \epsilon \int_s h_s \vec{E}_t \cdot (\vec{u}_s \wedge \text{grad}_t \Psi_{mp}) ds \quad (2.27)$$

mais Ψ_{mp} vérifie l'équation :

$$\text{div grad}_t \Psi_{mp} + l_{mp}^2 \Psi_{mp} = 0 \text{ avec } \partial \Psi_{mp} / \partial n = 0 \text{ sur } c$$

l'équation 2.27 s'écrit donc :

$$-l_{mp}^2 \int_s h_s H_s \Psi_{mp} ds + \int_s \frac{\partial \vec{H}_t}{\partial s} \cdot \text{grad}_t \Psi_{mp} ds = j\omega \epsilon \int_s h_s \vec{E}_t \cdot (\vec{u}_s \wedge \text{grad}_t \Psi_{mp}) ds \quad (2.28)$$

En multipliant l'équation 2.23 par $\text{grad}_t \Psi_{mp}$, en intégrant sur la surface s et en tenant compte des propriétés d'orthogonalité on arrive à :

$$\int_s \frac{\partial \vec{H}_t}{\partial s} \cdot \text{grad}_t \Psi_{mp} ds = \frac{\partial B_{mp}}{\partial s} l_{mp}^2 \quad (2.29)$$

l'équation 2.28 d'après la relation 2.29 s'écrit :

$$-l_{mp}^2 \int_s h_s H_s \Psi_{mp} ds + \frac{\partial B_{mp}}{\partial s} l_{mp}^2 = j\omega \epsilon \int_s h_s \vec{E}_t \cdot (\vec{u}_s \wedge \text{grad}_t \Psi_{mp}) ds$$

qui implique l'équation suivante :

$$\frac{\partial B_{mp}}{\partial s} - j\omega \epsilon b_{mp} - \gamma_{mp} = -\frac{j\omega \epsilon}{l_{mp}^2} \int_s \frac{p}{R} \cos \theta \vec{E}_t \cdot (\vec{u}_s \wedge \text{grad}_t \Psi_{mp}) ds - \int_s \frac{p}{R} \cos \theta H_s \Psi_{mp} ds \quad (2.30)$$

ANNEXE C

Intégrales des fonctions de Bessel

$$\int_0^a p J_2(u_{2q} \frac{p}{a}) J_2(u_n \frac{p}{a}) dp = - \frac{a^2 u_{2q}}{u_{2q}^2 - u_n^2} J_1(u_{2q}) J_2(u_n)$$

$$\int_0^a p J_1(u_{2q} \frac{p}{a}) J_1(u_n \frac{p}{a}) dp = - \frac{a^2 u_n}{u_{2q}^2 - u_n^2} J_1(u_{2q}) J_2(u_n)$$

$$\int_0^a p^2 J_0(u_{2q} \frac{p}{a}) J_1(u_n \frac{p}{a}) dp = \frac{a^3 u_n^3}{(u_{2q}^2 - u_n^2)^2} J_0(u_{2q}) J_2(u_n)$$

$$\int_0^a p^2 J_1(u_{2q} \frac{p}{a}) J_1'(u_n \frac{p}{a}) dp = \frac{a^3 (u_{2q}^2 - 3u_n^2)}{(u_{2q}^2 - u_n^2)^2} J_2(u_n) J_1(u_{2q})$$

$$\int_0^a p^2 J_1'(u_{2q} \frac{p}{a}) J_1(u_n \frac{p}{a}) dp = \frac{a^3 u_n (u_{2q}^2 + u_n^2)}{u_{2q} (u_{2q}^2 - u_n^2)^2} J_2(u_n) J_1(u_{2q})$$

$$\int_0^a p J_1(v_{2q} \frac{p}{a}) J_1(u_n \frac{p}{a}) dp = - \frac{a^2 u_n}{v_{2q}^2 - u_n^2} J_2(u_n) J_1(v_{2q})$$

$$\int_0^a p J_2(v_{2q} \frac{p}{a}) J_2(u_n \frac{p}{a}) dp = - \frac{a^2 v_{2q}}{v_{2q}^2 - u_n^2} J_2(u_n) J_1(v_{2q})$$

$$\int_0^a p J_2(v_{2q} \frac{p}{a}) J_2(v_n \frac{p}{a}) dp = \frac{a^2 (v_n^2 - 2)}{v_n (v_{2q}^2 - v_n^2)} J_2(v_{2q}) J_1(v_n)$$

$$\int_0^a p J_1(v_{2q} \frac{p}{a}) J_1(v_n \frac{p}{a}) dp = - \frac{a^2 v_{2q}}{v_{2q}^2 - v_n^2} J_1(v_n) J_1'(v_{2q})$$

$$\int_0^a p^2 J_0(v_{2q} \frac{p}{a}) J_1(v_n \frac{p}{a}) dp = \frac{a^3 (4v_n^2 + v_{2q}^2 - 3v_{2q}^2 v_n^2)}{2v_{2q} (v_{2q}^2 - v_n^2)^2} J_1(v_n) J_1(v_{2q})$$

$$\int_0^a p^2 J_1(v_{2q} \frac{p}{a}) J_1'(v_n \frac{p}{a}) dp = \frac{a^3 (v_n^4 + v_{2q}^2 - 3v_n^2)}{v_n (v_{2q}^2 - v_n^2)^2} J_1(v_n) J_1(v_{2q})$$

$$\int_0^a p^2 J_1'(v_{2q} \frac{p}{a}) J_1(v_n \frac{p}{a}) dp = \frac{a^3 (v_{2q}^2 + v_n^2 - v_{2q}^2 v_n^2)}{v_{2q} (v_{2q}^2 - v_n^2)^2} J_1(v_n) J_1(v_{2q})$$

$$\int_0^a \rho J_1\left(\nu_{0q} \frac{\rho}{a}\right) J_1\left(\nu_{11} \frac{\rho}{a}\right) d\rho = - \frac{\alpha^2 \nu_{0q}}{\nu_{0q}^2 - \nu_{11}^2} J_1(\nu_{11}) J_0(\nu_{0q})$$

$$\int_0^a \rho^2 J_0\left(\nu_{0q} \frac{\rho}{a}\right) J_1\left(\nu_{11} \frac{\rho}{a}\right) d\rho = \frac{\alpha^3 (\nu_{0q}^2 + \nu_{11}^2)}{(\nu_{0q}^2 - \nu_{11}^2)^2} J_0(\nu_{0q}) J_1(\nu_{11})$$

$$\int_0^a \rho^2 J_0'\left(\nu_{0q} \frac{\rho}{a}\right) J_1'\left(\nu_{11} \frac{\rho}{a}\right) d\rho = \frac{2\alpha^3 \nu_{0q} \nu_{11}}{(\nu_{0q}^2 - \nu_{11}^2)^2} J_0(\nu_{0q}) J_1(\nu_{11})$$

$$\int_0^a \rho J_1\left(u_{2q} \frac{\rho}{a}\right) J_1\left(u_{11} \frac{\rho}{a}\right) d\rho = - \frac{\alpha^2}{u_{2q}^2 - u_{11}^2} J_1(u_{2q}) J_1(u_{11})$$

$$\int_0^a \rho J_2\left(u_{2q} \frac{\rho}{a}\right) J_2\left(u_{11} \frac{\rho}{a}\right) d\rho = - \frac{\alpha^2 u_{2q}}{u_{11} (u_{2q}^2 - u_{11}^2)} J_1(u_{2q}) J_1(u_{11})$$

$$\int_0^a \rho J_1\left(u_{0q} \frac{\rho}{a}\right) J_1\left(u_{11} \frac{\rho}{a}\right) d\rho = - \frac{\alpha^2 u_{11}}{u_{0q}^2 - u_{11}^2} J_1(u_{0q}) J_2(u_{11})$$

$$\int_0^a \rho^2 J_0\left(u_{0q} \frac{\rho}{a}\right) J_1\left(u_{11} \frac{\rho}{a}\right) d\rho = \frac{2\alpha^3 u_{0q} u_{11}}{(u_{0q}^2 - u_{11}^2)^2} J_1(u_{0q}) J_2(u_{11})$$

$$\int_0^a \rho^2 J_0'\left(u_{0q} \frac{\rho}{a}\right) J_1'\left(u_{11} \frac{\rho}{a}\right) d\rho = \frac{\alpha^3 (u_{0q}^2 + u_{11}^2)}{(u_{0q}^2 - u_{11}^2)^2} J_1(u_{0q}) J_2(u_{11})$$

$$\int_0^a \rho J_0'\left(u_{0q} \frac{\rho}{a}\right) J_1\left(u_{11} \frac{\rho}{a}\right) d\rho = - \frac{\alpha^2}{u_{0q}^2 - u_{11}^2} J_1(u_{11}) J_1(u_{0q})$$

BIBLIOGRAPHIE

1. Ali Hasan Mayfeh : "Perturbation methods " John Wiley & sons In
1973 , pp 58-59
2. Papiernik A. , cours DEA : " Communications microonde et optique " .
U.E.R des sciences - Université de Limoges.
3. L. Lewin : "Theory of waveguides,, Newnes - Butterworths 1975 ,
p.p 102 - 105
4. Jouquet M. : "Les effets de la courbure sur la propagation des onde
électromagnétiques dans les guides à section circulaire,,
Cables et Transmission (Paris), 1, 2, p.p 134-135.
5. Brayer M., YHUEL J. : "Etude en courbure des guide d'ondes à grande
distance , cas des guides métalliques,, , annales
des télécommunications sept-Oct. 1972 p.p 370.
6. Collin R. : "Field theory of guided waves,, McGraw Hill ,1960 ,
pp 182- 197.
7. Microwave engineers' Handbook: vol 1 , Artech house Inc. 1971 p.p